

Eine schubversteifungsfreie Reissner-Mindlin-Plattenformulierung mittels Hu-Zhang-Elemente

Adam Sky^{1*}, Michael Neunteufel², Jack S. Hale¹, Andreas Zilian¹

¹ Department of Engineering, University of Luxembourg

² Institute of Analysis and Scientific Computing, Technische Universität Wien

Zusammenfassung: Eine neuartige Diskretisierung der Reissner-Mindlin-Plattengleichung, die für den symmetrischen Momententensor Hu-Zhang-Elemente und für die Schubspannungen Raviart-Thomas-Elemente einsetzt, wird vorgestellt. Die Konstruktion des Hu-Zhang-Elements und entsprechende Transformationsvorschriften werden diskutiert. Existenz und Eindeutigkeit werden bewiesen und die Robustheit anhand von Beispielen demonstriert.

1 Schubversteifung in der Reissner-Mindlin-Platte

Die Energiefunktion der linear elastischen Reissner-Mindlin-Platte [11] lautet

$$I(w, \phi) = \frac{1}{2} \int_A \frac{t^3}{12} \langle \text{sym } D\phi, \mathbb{D} \text{sym } D\phi \rangle + k_s \mu t \|\nabla w - \phi\|^2 \, dA - \int_A t w f \, dA. \quad (1)$$

Hier wurde der Schubmodul μ mit einem Korrekturfaktor k_s vorgesehen, um die infolge der angenommenen Kinematik überhöhte Schubsteifigkeit der Formulierung zu berücksichtigen. Der dazugehörige Materialtensor lautet $\mathbb{D} = (E/1 - \nu^2)[\nu \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} + (1 - \nu)\mathbb{J}]$, f sind die Volumenkräfte und die Dicke ist t . Die Variation von Gl. (1) bezüglich der Durchbiegung w und Rotationen ϕ ergibt die schwache Form der Weggrößenformulierung

$$\int_A \frac{t^3}{12} \langle \text{sym } D\delta\phi, \mathbb{D} \text{sym } D\phi \rangle + k_s \mu t \langle \nabla \delta w - \delta\phi, \nabla w - \phi \rangle \, dA = \int_A t \delta w f \, dA, \quad (2)$$

*Korrespondierender Autor: E-Mail: adam.sky@uni.lu

die im Raum $H_0^1(A) \times [H_0^1(A)]^2$ wohlgestellt ist. Die lokalen Formen der Gleichgewichtsgleichungen lauten

$$-k_s \mu t \operatorname{div}(\nabla w - \phi) = t f \quad \text{in} \quad A, \quad (3a)$$

$$-\frac{t^3}{12} \operatorname{Div}(\mathbb{D} \operatorname{sym} D\phi) - k_s \mu t (\nabla w - \phi) = 0 \quad \text{in} \quad A. \quad (3b)$$

Um das Problem der Schubversteifung sichtbar zu machen, wird die Gl. (2) durch t^3 geteilt

$$\int_A \langle \operatorname{sym} D\delta\phi, \mathbb{D}_* \operatorname{sym} D\phi \rangle + \frac{k_s \mu}{t^2} \langle \nabla \delta w - \delta\phi, \nabla w - \phi \rangle dA = \int_A \delta w g dA. \quad (4)$$

Des Weiteren werden die Definitionen $\mathbb{D}_* = (1/12)\mathbb{D}$ und $f = t^2 g$ eingeführt. Geht die Dicke der Scheibe gegen Null $t \rightarrow 0$ und dadurch $k_s \mu / t^2$ gegen unendlich, so muss der Term $\nabla w - \phi$ schneller gegen Null gehen, damit die Energie endlich bleibt. Betrachtet man die interagierenden Felder, erkennt man, dass diese in inkompatiblen Räumen leben

$$\nabla w \in \nabla H^1(A) = H(\operatorname{curl}, A) \cap \ker(\operatorname{curl}) \not\subseteq [H^1(A)]^2 \ni \phi. \quad (5)$$

Dank der Dichtheit von $[H^1(A)]^2$ in $H(\operatorname{curl}, A)$ spielt das für unendliche Räume keine Rolle. Für endlich-dimensionale Unterräume ist dies aber nicht der Fall, sodass eine klassische Lagrange'sche $C^0(A)$ -Diskretisierung zu fehlerhaften Ergebnissen führen kann. Grund dafür ist die nicht ausreichend gute Approximation eines eventuell diskontinuierlichen Gradienten der Durchbiegung $\nabla w \notin [C^0(A)]^2$ anhand eines kontinuierlichen Ansatzes der Rotationen $\phi \in [C^0(A)]^2$.

2 Eine schubversteifungsfreie Formulierung

Das Problem der Schubversteifung kann gelöst werden, indem kompatible Räume für den Gradienten der Durchbiegung ∇w und für die Rotation ϕ verwendet werden. Dafür werden zwei neue Variablen, die Momente $\mathbf{M} = \mathbb{D}_* \operatorname{sym} D\phi$ und die Schubspannungen $\mathbf{q} = -k_s \mu / t^2 (\nabla w - \phi)$, eingeführt. Die Feldgleichungen lauten nun

$$\operatorname{div} \mathbf{q} = g \quad \text{in} \quad A, \quad (6a)$$

$$-\operatorname{Div} \mathbf{M} + \mathbf{q} = 0 \quad \text{in} \quad A, \quad (6b)$$

$$\operatorname{sym} D\phi - \mathbb{A} \mathbf{M} = 0 \quad \text{in} \quad A, \quad (6c)$$

$$\mathbf{q} + \frac{k_s \mu}{t^2} (\nabla w - \phi) = 0 \quad \text{in} \quad A, \quad (6d)$$

wobei der Tensor $\mathbb{A} = (12/E)[(1 + \nu)\mathbb{J} - \nu \mathbb{1} \otimes \mathbb{1}]$ invers zu \mathbb{D}_* ist. Die Multiplikation mit Testfunktionen und anschließende partielle Integration ergeben die Integralform der gemischten Formulierung

$$\begin{aligned} \int_A \langle \delta \mathbf{M}, \mathbb{A} \mathbf{M} \rangle + \frac{t^2}{k_s \mu} \langle \delta \mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle + \langle \operatorname{Div} \delta \mathbf{M}, \phi \rangle - (\operatorname{div} \delta \mathbf{q}) w - \langle \delta \mathbf{q}, \phi \rangle dA = 0, \\ \int_A \langle \delta \phi, \operatorname{Div} \mathbf{M} \rangle - \delta w (\operatorname{div} \mathbf{q}) - \langle \delta \phi, \mathbf{q} \rangle dA = - \int_A \delta w g dA. \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{array}{ccc}
H^1(A) & \xrightarrow{\mathbf{R}\nabla} & H(\operatorname{div}, A) \xrightarrow{\operatorname{div}} L^2(A) \\
\Pi_g^3 \downarrow & & \Pi_a^2 \downarrow \quad \Pi_o^2 \downarrow \\
U^3(A) & \xrightarrow{\mathbf{R}\nabla} & \mathcal{RT}^2(A) \xrightarrow{\operatorname{div}} D^2(A)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
H^2(A) & \xrightarrow{\text{airy}} & H^{\text{sym}}(\operatorname{Div}, A) \xrightarrow{\operatorname{Div}} [L^2(A)]^2 \\
\Pi_a^5 \downarrow & & \Pi_s^3 \downarrow \quad \Pi_o^2 \downarrow \\
\mathcal{A}^5(A) & \xrightarrow{\text{airy}} & \mathcal{HZ}^3(A) \xrightarrow{\operatorname{Div}} [D^2(A)]^2
\end{array}$$

Abbildung 1: Ein zweidimensionaler exakter de Rham-Komplex mit kommutierenden Interpolanten bezüglich der diskreten Räume (links). Ein exakter Subkomplex des Elastizitätskomplexes mit kommutierenden Interpolanten, worin der erste diskrete Raum das Argyris-Element $\mathcal{A}^5(A) \subset H^2(A)$ ist.

Theorem 2.1 (Robustheit in t). *Unter der Annahme eines kontrahierbaren Gebietes ist das Variationsproblem in Gl. (7) im folgenden Raum wohlgestellt*

$$\{w, \phi, \mathbf{M}, \mathbf{q}\} \in X(A) = \underbrace{L^2(A) \times [L^2(A)]^2}_{=Y(A)} \times \underbrace{\{H^{\text{sym}}(\operatorname{Div}, A) \times H(\operatorname{div}, A)\}}_{=Z(A)}. \quad (8)$$

Des weiteren gilt die Stabilitätsabschätzung $\|\{w, \phi\}\|_Y + \|\{\mathbf{M}, \mathbf{q}\}\|_{Z_t} \leq c\|g\|_{Y'}$, wobei die Konstante $c = c(\mathbb{A}, k_s, \mu)$ von der Dicke t unabhängig ist. In der Abschätzung wurde die t -abhängige Norm $\|\{\mathbf{M}, \mathbf{q}\}\|_{Z_t}^2 = \|\mathbf{M}\|_{L^2}^2 + \|\operatorname{Div} \mathbf{M} - \mathbf{q}\|_{L^2}^2 + t^2 \|\mathbf{q}\|_{L^2}^2 + \|\operatorname{div} \mathbf{q}\|_{L^2}^2$ verwendet. Der Raum Y wird mit der natürlichen Norm $\|\{w, \phi\}\|_Y = \|w\|_{L^2}^2 + \|\phi\|_{L^2}^2$ ausgestattet. Mit Y' wird der duale Raum von Y definiert.

Beweis. Der Beweis erfolgt mit dem Brezzi-Theorem anhand klassischer Ungleichungen, exakter Sequenzen von Hilberträumen (Abb. 1) und der Konstruktion geeigneter Lösungen für \mathbf{q} und \mathbf{M} mittels der Poisson- und Elastizitätsgleichungen für die LBB-Bedingung. \square

3 Diskretisierung

Die Diskretisierung erfordert konforme Unterräume für $H(\operatorname{div}, A)$, $L^2(A)$ und $H^{\text{sym}}(\operatorname{Div}, A)$. Für die ersten zwei werden Raviart-Thomas- $\mathcal{RT}^p(A) \subset H(\operatorname{div}, A)$ und diskontinuierliche Lagrange- $D^p(A) \subset L^2(A)$ Elemente eingesetzt. Diese erfüllen den kommutativen de Rham-Komplex (Abb. 1 (links)). Das zuerst entdeckte Element für $H^{\text{sym}}(\operatorname{Div}, A)$ -Diskretisierungen ist das sogenannte Arnold-Winther [1] Element, wofür es jedoch keine geschlossenen Formeln für die Konstruktion der Basis und keine Transformation für gekrümmte Geometrien gibt (für affine s. [2]). Alternativ kann das neuere Hu-Zhang-Element $\mathcal{HZ}^p(A) \subset H^{\text{sym}}(\operatorname{Div}, A)$ verwendet werden [6], für welches hier eine neue Transformation und eine Konstruktion der Basis mit Legendre-Polynomen [11] präsentiert wird. Auch für das Hu-Zhang-Element lässt sich ein kommutativer Komplex herleiten (Abb. 1 (rechts)).

Theorem 3.1 (Diskrete Existenz und Eindeutigkeit). *Das gemischte Variationsproblem in Gl. (7) ist im Raum $X_h^p(A) = Y_h^{p-1}(A) \times Z_h^p(A) \subset Y(A) \times Z(A) = X(A)$ mit den folgenden diskreten Räumen wohlgestellt.*

$$Y_h^{p-1}(A) = D_h^{p-1}(A) \times [D_h^{p-1}(A)]^2 \subset L^2(A) \times [L^2(A)]^2 = Y(A), \quad (9a)$$

$$Z_h^p(A) = \mathcal{HZ}_h^p(A) \times \mathcal{RT}_h^{p-1}(A) \subset H^{\text{sym}}(\operatorname{Div}, A) \times H(\operatorname{div}, A) = Z(A). \quad (9b)$$



Abbildung 2: Vorlagetenoren auf ihren jeweiligen Polytopen im Referenzelement.

Beweis. Der Beweis erfolgt automatisch aus dem kontinuierlichen Fall anhand Fortins Kriterium mit der Existenz kommutierender Komplexe [4, Thm. 4.8]. \square

Theorem 3.2 (Fehlerabschätzung). *Unter der Annahme der folgenden Regularität der exakten Lösung $w \in H^{p+1}(A)$, $\phi \in [H^p(A)]^2$, $\mathbf{M} \in [H^p(A)]^{2 \times 2}$, $\text{Div } \mathbf{M} \in [H^p(A)]^2$ und $\mathbf{q} \in [H^p(A)]^2$, gilt die Konvergenzrate*

$$\|\{w, \phi\} - \{w^h, \phi^h\}\|_Y + \|\{\mathbf{M}, \mathbf{q}\} - \{\mathbf{M}^h, \mathbf{q}^h\}\|_{Z_t} \leq Ch^p, \quad (10)$$

für uniforme Triangulierungen mit $C \neq C(t)$.

Beweis. Der Beweis erfolgt aus Céas Lemma und den kommutierenden Interpolanten. \square

3.1 Das Hu-Zhang-Element

Das Hu-Zhang-Element ist so definiert, dass volle $C^0(A)$ -Kontinuität bei den Eckpunkten und normale Kontinuität (tangential-tangential Komponenten dürfen zwischen Elementen springen) auf den Kanten herrscht. Um eine einfache und klare Unterscheidung der Komponente und ihrer Kontinuität bezüglich der Polytope des Elementes zu erzielen, wird die Methode der Polytopvorlagen [9, 10] verwendet. Auf dem Referenzelement $\Gamma = \{(\xi, \eta) \in [0,1] \mid \xi + \eta \leq 1\}$ sind Vorlagetenoren pro Polytop definiert (Abb. 2)

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_3 = \mathcal{T}_{123} &= \{\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1, \text{sym}(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2), \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2\}, \\
 \mathcal{T}_{12} &= \{\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2, \text{sym}(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2), \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1\}, \\
 \mathcal{T}_{13} &= \{\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1, -\text{sym}(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2), \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2\}, \\
 \mathcal{T}_{23} &= \{(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) \otimes (\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2), \text{sym}[(\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1) \otimes (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)], (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) \otimes (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)\}.
 \end{aligned} \quad (11)$$

Jeder dieser Sätze spannt den vollen symmetrischem Raum $\text{Sym}(2)$. Während die Sätze für die Eckpunkte und die Zelle die globale kartesische Basis verwenden, werden die Sätze der Kanten aus ihrer jeweiligen Tangential- und Normalvektoren konstruiert $\mathcal{T} = \{\boldsymbol{\tau} \otimes$

$\boldsymbol{\tau}$, $\text{sym}(\boldsymbol{\tau} \otimes \boldsymbol{\nu})$, $\boldsymbol{\nu} \otimes \boldsymbol{\nu}$. Um den zugrundeliegenden Polynomraum aufzuspannen, werden in dieser Arbeit baryzentrische Koordinaten zusammen mit Legendre-

$$\lambda_1(x,y) = 1 - x - y, \quad \lambda_2(x,y) = y, \quad \lambda_3(x,y) = x, \quad (12a)$$

$$l^0(x) = 1, \quad l^1(x) = x, \quad l^p(x) = (2p-1)x l^{p-1}(x) - (p-1)l^{p-2}(x), \quad (12b)$$

und integrierten Legendre-Polynomen

$$L_s^1(x,t) = x, \quad L_s^2(x,t) = \frac{1}{2}(x^2 - t^2),$$

$$L_s^p(x,t) = (2p-3)x L_s^{p-1}(x,t) - (p-3)t^2 L_s^{p-2}(x,t), \quad (13)$$

$$L_s^p(x,t) = (t)^p L^p\left(\frac{x}{t}\right), \quad L^p(x) = \int_{-1}^x l^{p-1}(x) dx, \quad p \geq 2,$$

eingesetzt. Die Konstruktion der Hu-Zhang-Basisfunktionen erfolgt nun durch die Kombination der Polynombasis mit den Vorlagentensoren.

Definition 3.1 (Hu-Zhang-Legendre-Basisfunktionen). *Im Folgenden werden die Basisfunktionen pro Polytop definiert.*

- Auf jedem Eckpunkt v_i lauten die Basisfunktionen

$$\boldsymbol{\varrho}_{ij} = \lambda_i \mathbf{T}_j, \quad \mathbf{T}_j \in \mathcal{T}_i, \quad (14)$$

sodass drei Basisfunktionen jedem Eckpunkt zugeordnet werden.

- Auf jeder Kante e_{ij} mit $(i,j) \in \mathcal{J} = \{(1,2), (1,3), (2,3)\}$, die mit dem Normalvektor $\boldsymbol{\nu}$ ausgerüstet ist, ergeben sich für $p \geq 2$ die folgenden Basisfunktionen

$$\boldsymbol{\varrho}_{ijk}^p = L_s^p(\lambda_i, \lambda_j) \mathbf{T}_k, \quad \mathbf{T}_k \in \{\mathbf{T} \in \mathcal{T}_{ij} \mid \mathbf{T}\boldsymbol{\nu} \neq 0\}, \quad (i,j) \in \mathcal{J}. \quad (15)$$

Dementsprechend entstehen für jede Polynomordnung p zwei Basisfunktionen.

- Die Basisfunktionen der Zelle lauten

$$\boldsymbol{\varrho}_{ijk}^p = L_s^p(\lambda_i, \lambda_j) \mathbf{T}_k, \quad \mathbf{T}_k \in \{\mathbf{T} \in \mathcal{T}_{ij} \mid \mathbf{T}\boldsymbol{\nu} = 0\}, \quad (i,j) \in \mathcal{J},$$

$$\boldsymbol{\varrho}_{ik}^p = \eta L_s^p(\lambda_1, \lambda_3) l^k(2\xi - 1) \mathbf{T}_i, \quad \mathbf{T}_i \in \mathcal{T}_{123}. \quad (16)$$

Die erste Definition wird zwar an den Kanten konstruiert, weist aber keine Konnektivität auf.

Die Kontinuität der Konstruktion erfordert nun passende Transformationen vom Referenzelement, um beim physikalischen Element erhalten zu bleiben. Da die Basisfunktionen $\boldsymbol{\varrho}$ der Eckpunkte und der Zelle mit der globalen kartesischen Tensorbasis konstruiert werden, benötigen sie nur eine Reparametrisierung, sodass für die physikalische Basisfunktionen gilt $\boldsymbol{\rho} = \text{id}(\boldsymbol{\varrho}) = \mathbb{J}\boldsymbol{\varrho} = \boldsymbol{\varrho}$. Um die normale Kontinuität der Basisfunktionen auf den Kanten beizubehalten, wird für jede Kante e_{ij} einen Transformationstensor definiert

$$\boldsymbol{\rho}_{ijk}^p = \mathbf{T}_{ij} \boldsymbol{\varrho}_{ijk}^p \mathbf{T}_{ij}^T, \quad \mathbf{T}_{ij} = \frac{1}{\|\boldsymbol{\tau}\|^2} (\mathbf{t} \otimes \boldsymbol{\tau} + \mathbf{n} \otimes \boldsymbol{\nu}). \quad (17)$$

Für die Abbildung der Tangential- und Normalvektoren vom Referenz auf das physikalische Element gilt mit der Jacobi-Matrix $\mathbf{t} = \mathbf{J}\boldsymbol{\tau}$, $\mathbf{n} = (\text{cof } \mathbf{J})\boldsymbol{\nu}$ und $\|\boldsymbol{\tau}\| = \|\boldsymbol{\nu}\|$.

4 Numerische Beispiele

In den nachfolgenden Beispielen werden die relativen Fehler in der L^2 -Norm gemessen $\|\widetilde{(\cdot)} - (\cdot)^h\|_{L^2} / \|\widetilde{(\cdot)}\|_{L^2}$. Dabei ist $\widetilde{(\cdot)}$ ein Maß für entweder die exakte oder eine verbesserte Lösung und $(\cdot)^h$ repräsentiert die FE-Lösung. Die Elemente wurden in NGSolve¹ [8] implementiert und sind öffentlich verfügbar².

4.1 Schubversteifung

Auf einem festgehaltenen rechteckigen Gebiet $\bar{A} = [0,1]^2$ mit der Belastung

$$g(x,y) = \frac{200E}{1-\nu^2} [f_0(y)f_1(x)[2f_0(y)^2 + f_0(x)f_1(y)] + f_0(x)f_1(y)[2f_0(x)^2 + f_0(y)f_1(x)], \quad (18)$$

lautet die exakte Lösung

$$\begin{aligned} \tilde{w}(x,y) &= \frac{100}{3} [f_0(x)^3 f_0(y)^3] - \frac{2t^2}{5(1-\nu)} [f_0(y)^3 f_0(x)f_1(x) + f_0(x)^3 f_0(y)f_1(y)], \\ \tilde{\phi}(x,y) &= 100 \begin{bmatrix} f_0(y)^3 f_0(x)^2 f_2(x) \\ f_0(x)^3 f_0(y)^2 f_2(y) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (19)$$

woraus man die Momente $\widetilde{\mathbf{M}}(x,y) = \mathbb{D}_* \text{sym D}\tilde{\phi}$ und Schubspannungen $\tilde{\mathbf{q}}(x,y) = -(k_s \mu / t^2)(\nabla \tilde{w} - \tilde{\phi})$ herleitet. Die Präsentation der Gleichung basiert auf den folgenden Hilfsfunktionen

$$f_0(\alpha) = (\alpha - 1)\alpha, \quad f_1(\alpha) = 5\alpha^2 - 5\alpha + 1, \quad f_2(\alpha) = 2\alpha - 1. \quad (20)$$

Die Ergebnisse der Konvergenz mit den Materialkonstanten $E = 1$ [MN/m²], $\nu = 0.3$ und der Dicke $t = 10^{-5}$ [m] auf regulären Netzen von $\{2^1, 2^3, \dots, 2^{11}\}$ -kubischen Elementen werden in Abb. 4 dargestellt. Es wird zwischen der hier vorgestellten neuen Formulierung „*Four-Field Symmetric Reissner-Mindlin (FFSRM)*“, dem „*Tangential Displacements Normal-Normal Stresses (TDNNS)*“ [7], dem „*Mixed Interpolation of Tensorial Components (MITC)*“ [3] und der primalen Formulierung (*PRM*) verglichen. Die Schubversteifung der PRM-Formulierung wird durch die suboptimale Konvergenz in $\{w, \phi, \mathbf{M}\}$ und die Divergenz in \mathbf{q} sichtbar. Die daraus resultierende schlechte Abschätzung der Momente wird in Abb. 4 unten rechts illustriert. Interessanterweise leidet die MITC-Formulierung unter suboptimaler Konvergenz in \mathbf{q} . Dagegen sind die FFSRM- und TDNNS-Methoden robust und konvergieren optimal, sodass Schubversteifung vermieden wird. Die hohe Genauigkeit in der Approximation der Momente erkennt man in Abb. 4 oben rechts.

¹www.ngsolve.org

²https://github.com/Askys/NGSolve_HuZhang_Element

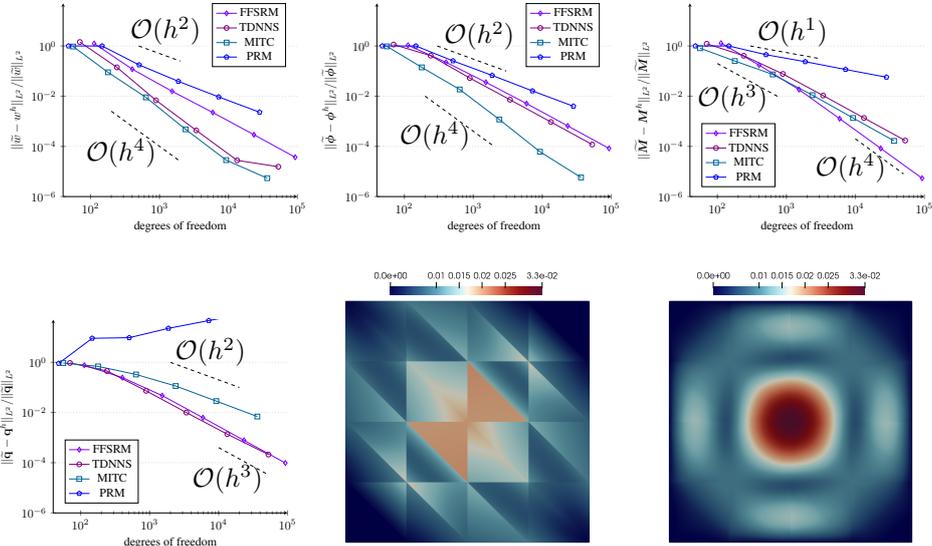


Abbildung 4: Relativer Fehler des kubischen Ansatzes für $t = 10^{-5}$ [m], und Norm der Momente $\|M\|$ für die PRM- und FFSRM-Formulierungen auf einem Netz von 32 Elementen.

4.2 Singularität und hp-Adaptivität

In diesem Beispiel wird ein festgehaltenes und gekrümmtes, L-förmiges Gebiet $\bar{A} = \{(x, y) \in [-1, 1]^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\} \setminus (0, 1)^2$ betrachtet. Die Materialkonstanten lauten $E = 240$ [MN/m²], $\nu = 0.3$ und die Dicke ist $t = 10^{-3}$ [m]. Die Last $g(x, y) = -1000$ ist konstant im Gebiet. Der Geometrie zur Folge entsteht am inneren Eckpunkt eine Singularität der Momente. Um den daraus stammenden Fehler zu minimieren wird eine adaptive h-Verfeinerung ausgeführt, deren optimale Konvergenz in Abb. 5 mit der Suboptimalen einer uniformen Verfeinerung verglichen wird. Der Fehler in den Momenten wird mittels der Glättung $\|\Pi_g^p M^h - M^h\|_{L^2} / \|\Pi_g^p M^h\|_{L^2}$ abschätzt [5]. Offensichtlich erlaubt die hier präsentierten Konstruktion und Transformationen eine effektive hp-Strategie auf gekrümmten Geometrien.

5 Fazit und Ausblick

Diese Arbeit stellte eine neue Formulierung der Reissner-Mindlin-Plattentheorie vor, die von Schubversteifung frei ist. Für die Formulierung wurde eine Konstruktion des Hu-Zhang-Elementes auf der Basis von Legendre-Polynomen und eine für gekrümmte Elemente geeignete Transformation präsentiert. Die optimale Konvergenz der Formulierung und die Wirksamkeit der Konstruktion der Elemente wurden mit zwei Beispielen demonstriert. Offensichtlich liefert die neue Formulierung (FFSRM) ähnliche Genauigkeit und Robustheit wie TDNNS und ist dabei robuster als MITC und PRM. Zukünftig ist die Formulierung auf die verwandte Naghdi-Schalentheorie zu erweitern.

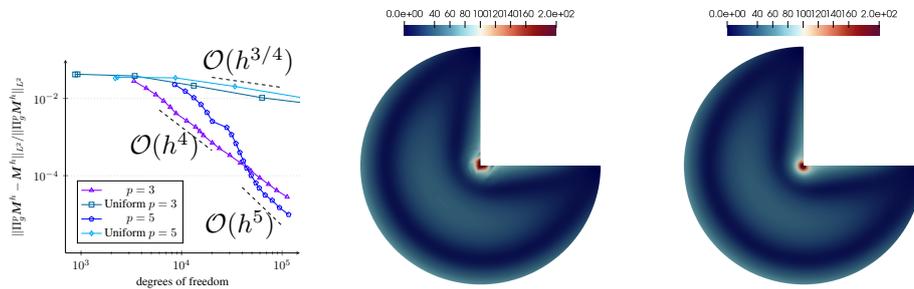


Abbildung 5: Darstellung der Konvergenz der Momente, und die Verteilung ihrer Norm $\|M\|$ auf einem uniformen Netz mit 288 Elementen und einem lokal-verfeinerten Netz mit 246 Elementen.

Literatur

- [1] ARNOLD, D. N. ; WINTHER, R. : Mixed finite elements for elasticity. In: *Numerische Mathematik* 92 (2002), Sept., Nr. 3, S. 401–419
- [2] AZNARAN, F. R. A. ; FARRELL, P. E. ; KIRBY, R. C.: Transformations for Piola-mapped elements. In: *The SMAI Journal of computational mathematics* 8 (2022), S. 399–437
- [3] BATHE, K.-J. ; BREZZI, F. ; CHO, S. W.: The MITC7 and MITC9 Plate bending elements. In: *Computers & Structures* 32 (1989), Jan., Nr. 3-4, S. 797–814
- [4] BRAESS, D. : *Finite Elemente - Theorie, schnelle Löser und Anwendungen in der Elastizitätstheorie*. 5. Berlin : Springer-Verlag, 2013
- [5] GRÄTSCH, T. ; BATHE, K.-J. : A posteriori error estimation techniques in practical finite element analysis. In: *Computers & Structures* 83 (2005), Nr. 4, S. 235–265
- [6] HU, J. ; ZHANG, S. : A family of conforming mixed finite elements for linear elasticity on triangular grids. In: *arXiv* (2014)
- [7] PECHSTEIN, A. S. ; SCHÖBERL, J. : The TDNNS method for Reissner–Mindlin plates. In: *Numerische Mathematik* 137 (2017), Nov., Nr. 3, S. 713–740
- [8] SCHÖBERL, J. : C++ 11 implementation of finite elements in NGSolve. In: *Institute for Analysis and Scientific Computing, Vienna University of Technology* (2014)
- [9] SKY, A. ; MUENCH, I. : Polytopal templates for the formulation of semi-continuous vectorial finite elements of arbitrary order. In: *arXiv* (2022)
- [10] SKY, A. ; MUENCH, I. ; RIZZI, G. ; NEFF, P. : Higher order Bernstein–Bézier and Nédélec finite elements for the relaxed micromorphic model. In: *Journal of Computational and Applied Mathematics* 438 (2024), S. 115568
- [11] SKY, A. ; NEUNTEUFEL, M. ; HALE, J. S. ; ZILIAN, A. : A Reissner–Mindlin plate formulation using symmetric Hu-Zhang elements via polytopal transformations. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 416 (2023), S. 116291