

Systemzuverlässigkeit von Verbundfugen mit spröden und duktilen Verbundmitteln

Kevin Wolters, Markus Feldmann

Institut für Stahlbau, RWTH Aachen University

Zusammenfassung: Bei der Bemessung von Verbundträgern geht die Schubtragfähigkeit von Verbundmitteln, z.B. Kopfbolzendübel, mit dem Bemessungswert P_{Rd} ein. In einer Verbundfuge sind jedoch meist Dutzende bis Hunderte von Verbundmitteln angeordnet, deren Einzeltragfähigkeit zufallsverteilt ist. Das reale Traglastniveau der Verbundfuge kann daher oberhalb des Bemessungsniveaus liegen. Dieser Beitrag behandelt die theoretische Systemzuverlässigkeit von Verbundfugen mit spröden und duktilen Verbundmitteln. Diese hängt maßgeblich von der Anzahl der verwendeten Verbundmittel sowie von der Streuung der zufallsverteilten Traglast ab.

1 Einleitung

Bei der Bemessung von Verbundträgern nach Eurocode 4 [1] werden zur Berechnung der Momententragfähigkeit Teilsicherheitsbeiwerte für Stahl, Beton sowie für die Verbundmittel verwendet. Die Tragfähigkeit eines einzelnen Kopfbolzens geht indirekt über den Verdübelungsgrad in die Berechnung der Momententragfähigkeit eines Verbundträgers ein. Bei einem vollverdübelteten Träger wird die Momententragfähigkeit durch die Einzeltragfähigkeit der Teilquerschnitte Stahl und Beton begrenzt, während bei einem teilverdübelteten Träger die Verbundmittel maßgebend werden. Bei der Ermittlung des Verdübelungsgrades wird die Tragfähigkeit jedes Verbundmittels mit dem Bemessungswert P_{Rd} nach dem Teilsicherheitskonzept angenommen.

In der Verbundfuge eines Trägers wirken jedoch Verbundmittel wie Kopfbolzendübel oder Verbunddübelleisten meist in großer Anzahl in einer Art Parallelsystem, in dem sicherheitssteigernde Systemeffekte auftreten können. Unter Berücksichtigung der Umverteilung von Kräften beim Versagen einzelner Tragelemente sowie zufällig verteilter Dübeltragfähigkeiten lassen sich diese Effekte in idealisierter Form mit dem sogenannten Daniels-System [2] umschreiben.

Dieser Artikel beschreibt qualitativ und anhand von Beispielen die Systemeffekte von spröden und duktilen Verbundmitteln in Verbundfugen von Verbundträgern. Kapitel 2 beschreibt ideale Daniels-Systeme mit spröden und duktilen Tragelementen und eine Methodik zur Ausweitung der Erkenntnisse idealer Systeme auf allgemeine Fälle. Es folgen Untersuchungen zur Systemzuverlässigkeit von spröden (Kapitel 3) und duktilen Verbundmitteln (Kapitel 4) in der Verbundfuge. Der Beitrag schließt mit einer kurzen Zusammenfassung der Ergebnisse in Kapitel 5.

2 Daniels-Systeme

2.1 System und Annahmen

Bei Zuverlässigkeitsanalysen von Systemen werden häufig zunächst die beiden Grenzfälle Parallel- und Seriensystem betrachtet. In einem parallelen System versagt das System, sobald alle Komponenten ihre Tragfähigkeit überschreiten. Bei einem Seriensystem versagt das System, sobald das Versagenskriterium eines beliebigen einzelnen Elements erreicht wird. Das Seriensystem bildet die untere (sichere), das Parallelsystem die obere (unsichere) Grenze der realen Systemzuverlässigkeit. Jedoch entspricht z.B. in statisch unbestimmten Systemen keiner dieser beiden Grenzfälle der Realität, denn wenn eine einzelne Tragkomponente versagt, kommt es zu einer Umlagerung der Beanspruchungen auf verbliebene Komponenten.

H. G. Daniels veröffentlichte 1945 für die Textilindustrie theoretische Überlegungen zu einem System von Faserbündeln mit ideal elastisch-spröden Fasern und einer zufällig verteilten Bruchspannung σ_u [2], siehe Abbildung 1a), bei dem im Falle des Versagens einzelner Fasern die Kraft auf alle verbleibenden Fasern umverteilt wird. Das System wurde später auf ähnliche oder andere Zuverlässigkeitsfragen im Bauwesen übertragen [3-7]. Das Daniels-System basiert auf den folgenden Annahmen, siehe auch [5]:

- Jede Faser hat die gleiche Querschnittsfläche und den gleichen Elastizitätsmodul.
- Die Belastung S ist eine deterministische Größe.
- Die Dehnung ε aller Fasern ist gleich, und die Umverteilung der Kraft im Falle eines Faserbruchs erfolgt gleichmäßig auf alle verbleibenden Fasern.
- Die Bruchspannung σ_u ist zufällig verteilt und innerhalb der einzelnen Fasern unabhängig voneinander, folgt aber der gleichen Verteilungsfunktion F_R .

Je nach Anzahl der Fasern und der Verteilung der Bruchspannung bzw. -dehnung (Standardabweichung, Variationskoeffizient) kann die maximale Kraft bereits beim ersten Faserbruch erreicht werden, siehe Abbildung 1b), oben. Dies ist wahrscheinlicher bei wenigen Fasern und einer geringen Standardabweichung der Bruchspannungsverteilung. Oder es bleibt ein Anstieg der Kraft möglich, siehe Abbildung 1b), unten, was bei vielen Fasern und einer großen Standardabweichung von ε_u wahrscheinlicher ist. Im letzteren Fall ergibt sich ein günstiger Effekt auf die Systemzuverlässigkeit.

In den folgenden Untersuchungen werden die Systemeffekte immer anhand der Systemzuverlässigkeit β_{sys} in Abhängigkeit der Anzahl der tragenden Elemente n dargestellt. Die Belastung S wird stets so gewählt, dass sich ein Zielwert β_l für $n=1$ ergibt. Der

Widerstand R der einzelnen Tragkomponenten wird als normalverteilt mit Mittelwert μ_R und Standardabweichung σ_R angenommen.

$$S = n \cdot (\mu_R - \beta_1 \cdot \sigma_R) \quad (1)$$

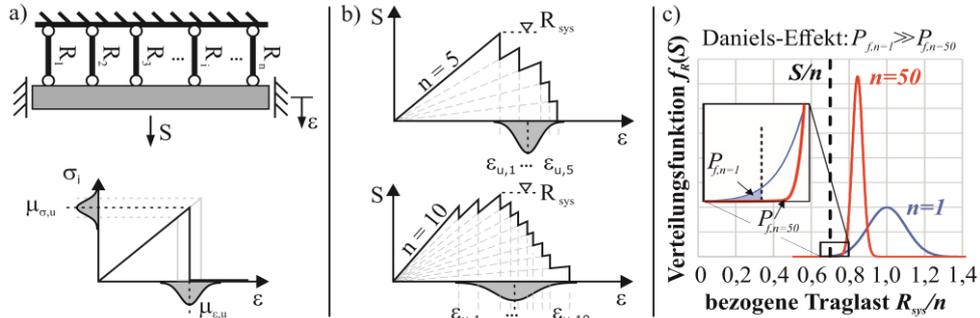


Abbildung 1: a) Schematische Darstellung des Daniels-Systems mit ideal elastisch-sprödem Materialverhalten und normalverteilter Bruchspannung; b) exemplarische Verläufe der Kraft S mit Zunahme der Dehnung ε bei Systemversagen nach Bruch der ersten (oben) bzw. dritten (unten) Tragkomponente; c) Dichtefunktion von Daniels-Systemen mit $n=1$ und $n=50$ Tragelementen mit Reduktion der Versagenswahrscheinlichkeit

2.2 Ideal-elastische, spröde Daniels-Systeme

Daniels hat in [2] Formeln für das asymptotische Verhalten von Mittelwert und Standardabweichung der Tragfähigkeit von Faserbündeln abgeleitet. Während der Mittelwert der bezogenen Tragfähigkeit mit zunehmender Faserzahl abnimmt, reduziert sich auch die Standardabweichung der resultierenden Traglast, sodass die Systemzuverlässigkeit für eine höhere Faserzahl n in den meisten baupraktischen Fällen zunimmt, siehe Abbildung 1c). *Hohenbichler* und *Rackwitz* entwickelten eine rekursive Gleichung für ein System mit n Elementen zur Bestimmung der Ausfallwahrscheinlichkeit $P_{f,sys}$ [7]:

$$P_{f,sys} = F_{R,sys,n}(S) = (-1)^{n+1} \cdot F_R^n\left(\frac{S}{n}\right) - \sum_{i=1}^{n-1} [(-1)^i \cdot \binom{n}{i} \cdot F_R^i\left(\frac{S}{n}\right) \cdot F_{R,sys,n-1}(S)] \quad (2)$$

$$\beta_{sys} = -\Phi(P_{f,sys}) \quad (3)$$

Die Ergebnisse für verschiedene Ausgangswerte der Zielzuverlässigkeit β_1 sowie verschiedene Variationskoeffizienten $\nu_R = \sigma_R/\mu_R$ sind in Abbildung 2a) dargestellt. Für niedrigere Werte beider Parameter verhält sich das Daniels-System eher wie ein Seriensystem. Bei größeren Streuungen der Bruchspannung und für höhere Zielwerte β_1 nimmt die Systemzuverlässigkeit β_{sys} hingegen zu. Der Grund dafür ist die höhere Wahrscheinlichkeit, dass verbleibende Tragkomponenten die Kräfte aufnehmen können, die bei einem Versagen einzelner Elemente nach der Umverteilung frei werden. So ergibt sich für $\beta_1 = 3$ eine Erhöhung der Systemzuverlässigkeit für $\nu_R = 0,1$ bei $n \geq 8$ Elementen und für $\nu_R = 0,15$ bei $n \geq 3$ Elementen.

2.3 Elastisch-plastische, duktile Daniels-Systeme

Die Systemzuverlässigkeit von Daniels-Systemen mit elastisch-plastischen und duktilen Komponenten kann über eine einfache Linearkombinationen von

Wahrscheinlichkeitsfunktionen und der Grenzzustandsfunktion $Z = R - S$ bestimmt werden. Unter der Annahme einer normalverteilten Faserkapazität bzw. Bruchspannung und einer deterministischen Kraft S beträgt die Systemwahrscheinlichkeit des Versagens:

$$P_{f,sys} = F_Z(0) = \Phi\left(\frac{0-\mu_Z}{\sigma_Z}\right) = \Phi\left(-\frac{n\cdot\mu_R-\mu_S}{\sqrt{n\cdot\sigma_R^2-\sigma_S^2}}\right) = \Phi\left(\frac{S-n\cdot\mu_R}{\sqrt{n}\cdot\sigma_R}\right) \quad (4)$$

Darüber hinaus kann eine Korrelation der einzelnen Komponenten über den Korrelationsfaktor ρ berücksichtigt werden ($\rho = 0$: Faserkapazität ist statistisch unabhängig; $\rho = 1$: vollständig abhängig).

$$P_{f,sys} = \Phi\left(\frac{S-n\cdot\mu_R}{\sqrt{n}\cdot\sigma_R} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\rho\cdot(n-1)}}\right) \quad (5)$$

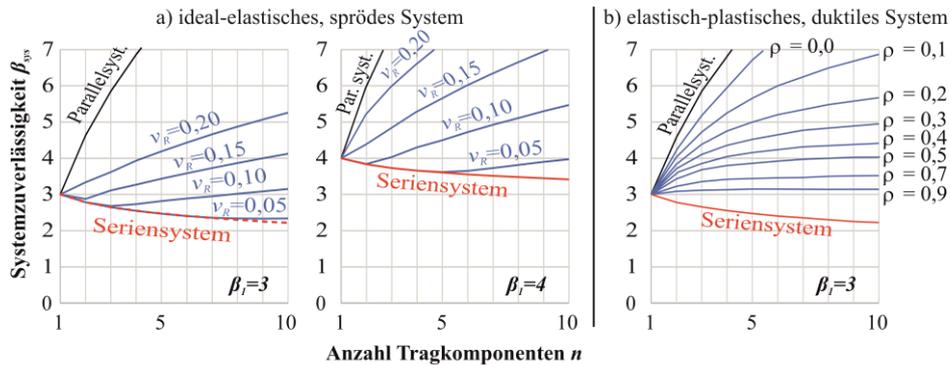


Abbildung 2: Entwicklung der Systemzuverlässigkeit für verschiedene Eingangsparameter β_1 und ν_R bei a) ideal-elastisch, spröden und b) elastisch-plastisch, duktilen Daniels-Systemen

Abbildung 2b) zeigt die Entwicklung der Systemzuverlässigkeit für verschiedene Korrelationskoeffizienten ρ . Je größer die Korrelation der Tragfähigkeit ist, desto geringer fällt der Systemeffekt aus. Aber auch bei einem Korrelationskoeffizienten von $\rho = 0,5$ kann der Zuverlässigkeitsindex β_{sys} bei etwa sechs Elementen von 3 auf 4 erhöht werden, was einer Abnahme der Versagenswahrscheinlichkeit $P_{f,sys}$ auf etwa $1/42$ nach Gl. (3) entspricht.

2.4 Allgemeine Systeme mit ungleicher Lastverteilung

In einem Verbundträger sind die Schubkräfte der Verbundmittel im elastischen Tragbereich in der Regel ungleich verteilt. Bei Versagen eines Verbundmittels wird die freiwerdende Schubkraft außerdem nicht gleichmäßig auf alle verbliebenen, sondern hauptsächlich auf umliegende Verbundmittel umverteilt. Daher kann das rekursive Gesetz, Gl. (2), insbesondere bei spröden Verbundmitteln nicht angewendet werden. Ein im Folgenden verwendetes numerisches Berechnungsverfahren im n -dimensionalen Hyperraum, das aus [5] übernommen wurde, wird in Abbildung 3 für zwei tragende Elemente dargestellt. Das Verfahren kann unter Berücksichtigung aller möglichen Versagensreihenfolgen auf weitere tragende Elemente ausgedehnt werden. Mit einer Berechnung im n -dimensionalen Raum, mit $n!$ zu berücksichtigenden Versagensfolgen und $2^{(n-1)^n}$ Versagensbereichen lässt sich die

Systemzuverlässigkeit ermitteln. Aufgrund der Rechenkapazität ist diese Methode auf $n \leq 6$ beschränkt.

Bei $n = 2$ setzt sich die Ausfallwahrscheinlichkeit des Systems aus den Ausfallwahrscheinlichkeiten der Regionen 1 bis 3 zusammen:

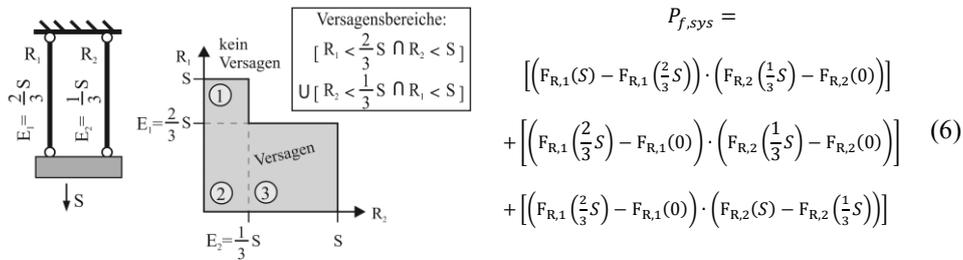


Abbildung 3: Beispiel für ein System mit ungleicher Lastverteilung zweier Komponenten und Identifizierung des Versagensbereichs

3 Verbundträger mit spröden Verbundmitteln

Für die Untersuchungen zur Systemzuverlässigkeit von Verbundfugen mit spröden Verbundmitteln wird ein in [8] beschriebenes Stabwerk-Feder-Modell verwendet. Das Vorgehen wird beispielhaft in Abbildung 4 zusammengefasst. Für jede mögliche der $n!$ Versagensreihenfolgen wird die Schubkraft des als nächstes versagenden Verbundmittels $P_{E,i}$ ermittelt. Die $2^{(n-1)}$ in den Berechnungen ermittelten Schubkräfte bilden analog zu Abbildung 3 (dort E_1, E_2) die Grenzwerte möglicher Versagensbereiche.

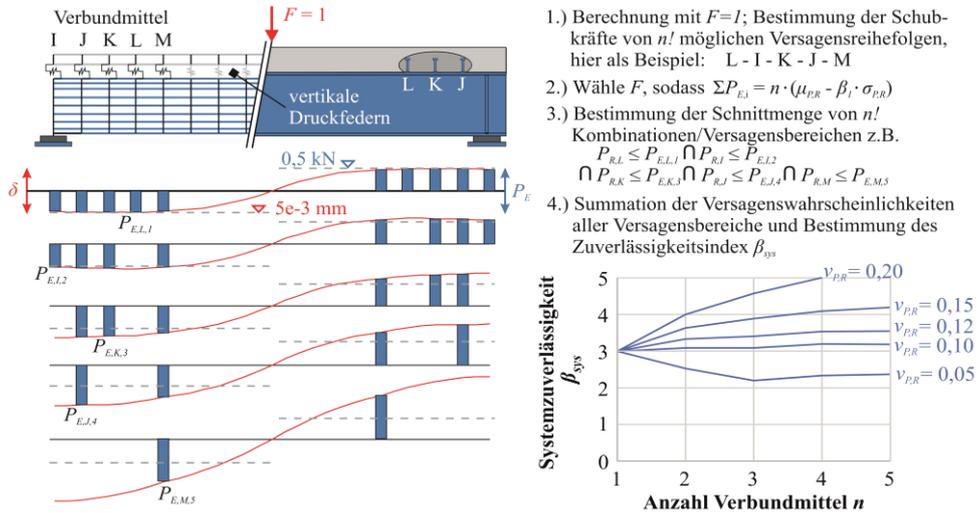


Abbildung 4: Berechnungsablauf der probabilistischen Untersuchungen zum Systemversagen der Verbundfuge mit elastischem Schlupf (δ) und resultierenden Schubkräften $P_{E,i}$ bei spröden Verbundmitteln; Ergebnisse für die Systemzuverlässigkeit β_{sys} für verschiedene $v_{p,R}$ für das vorliegende Beispiel

Die Systemzuverlässigkeit hängt unter anderem von der Wahl des Eingangswertes für die Zielzuverlässigkeit β_1 und dem Variationskoeffizienten der Dübeltragfähigkeit v_R ab. Besondere Aufmerksamkeit sollte der Wahl der einwirkenden Kraft F gewidmet werden. Im idealisierten System, siehe Kapitel 2.1, wird die einwirkende Kraft S proportional zur Anzahl der Elemente n gewählt. Die einwirkende Kraft F entwickelt sich hingegen über die Anzahl n der Verbundmittel nichtlinear, um die Anforderung in Abbildung 4, Punkt 2.) zu erfüllen.

Daher hängen die Ergebnisse für die Systemzuverlässigkeit auch von den Annahmen für die Skalierung von F ab. Abbildung 4 zeigt die Entwicklung der Systemzuverlässigkeit in Abhängigkeit vom Varianzkoeffizienten der Dübeltragfähigkeit $v_{P,R}$ und der Anzahl der Verbundmittel n . Auch hier gilt, je höher die Streuung der Dübelkapazität, desto ausgeprägter sind mögliche Umverteilungseffekte. Für $v_{P,R} \geq 0,1$ steigt in diesem Beispiel das Zuverlässigkeitsniveau des Systems. Für dieses Beispiel kann demnach gezeigt werden, dass bereits bei wenigen Kopfbolzendübeln ohne Berücksichtigung der Duktilität positive Systemeffekte in der Verbundfuge auftreten, sofern die Dübeltragfähigkeiten streuen und unabhängig voneinander sind. Nach [9] liegen die Variationskoeffizienten von Kopfbolzen nach Eurocode 4 zwischen $v_{P,R} = 0,13$ für Stahlversagen und $v_{P,R} = 0,21$ für Betonversagen, sodass selbst bei spröden Verbundmitteln von signifikanten Systemeffekten ausgegangen werden kann.

4 Verbundträger mit duktilen Verbundmitteln

Die Systemzuverlässigkeit im Falle von duktilen Verbundmitteln kann mit Hilfe gängiger Berechnungsmethoden durch Auswertung von Grenzzustandsfunktionen abgeschätzt werden. Eine bekannte Methode ist die First Order Reliability Method, genannt FORM [10]. Diese Methode verwendet einen iterativen Algorithmus, um den kürzesten Abstand zwischen einer Grenzzustandsfunktion (oder -fläche) und dem Ursprung eines Hyperraum-Koordinatensystems zu berechnen. Zu diesem Zweck werden beliebig zufallsverteilte Eingangswerte in standardnormalverteilte Parameter transformiert. Im Falle normalverteilter Eingangswerte und einer linearen Grenzzustandsfunktion liefert FORM exakte Ergebnisse. Für nichtlineare Grenzzustandsfunktionen führen die Ergebnisse in der Regel zu einer ausreichend genauen Annäherung. So lässt sich beispielsweise die plastische Momententragfähigkeit des in Abbildung 5 dargestellten Verbundträgers probabilistisch ermitteln.

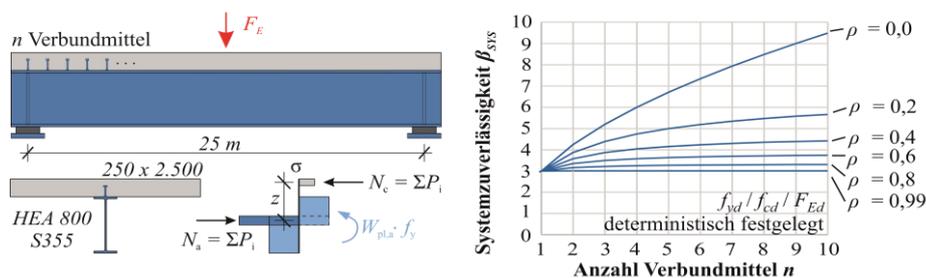


Abbildung 5: Beispiel für eine Zuverlässigkeitsanalyse mit duktilen Verbundmitteln; Systemzuverlässigkeit für das gegebene Beispiel mit korrelierter Dübeltragfähigkeit ($\mu_{P,R} = 150kN$; $f_{yd} = 355 MPa$; $f_{cd} = 40 MPa$; $v_R = 0,12$; Skalierung von F_{Ed} , sodass $M_{Ed} = M_{Rd}$)

Gemäß Teilverbundtheorie ergibt sich unter Annahme eines vollplastischen Verhaltens die Grenzzustandsfunktion g .

$$g = M_R - M_E = M_{pl,a} + N_a \cdot z - M_E = W_{pl,a} \cdot f_y + \sum P_i \cdot z - \frac{F_E \cdot L}{4} \quad (7)$$

$$\text{mit } z = \frac{h_a}{2} + h_c - \frac{1}{2} \frac{\sum P_i}{b_c \cdot (\alpha_{cc} f_c)} - \frac{1}{2} \frac{\sum P_i}{2 \cdot z_w \cdot f_y}$$

Die geometrischen Parameter werden deterministisch festgelegt. Die Tragfähigkeit der Kopfbolzendübel wird normalverteilt angenommen, mit korrelierten Einzeltragfähigkeiten. Die Materialfestigkeiten sowie die Einwirkung F_E werden deterministisch auf ihrem jeweiligen Bemessungsniveau angenommen. Die Ergebnisse weiterer parametrischer Studien mit normalverteilten Festigkeiten und Kräften sind in [11,12] dokumentiert. F_{Ed} wird so gewählt, dass unter Verwendung üblicher Teilsicherheitsbeiwerte $M_{Ed} = M_{Rd}$ gilt ($\gamma_V = 1,25$; $\gamma_a = 1,0$; $\gamma_c = 1,5$; $\gamma_G = 1,35$).

Die Auswertung von Gl. (7) mit FORM berücksichtigt n normalverteilte Eingangsparameter $P_{E,i}$. Abbildung 5 zeigt den Systemeffekt korrelierter Dübeltragfähigkeiten. Der Zuverlässigkeitsindex β_{sys} wächst für übliche Korrelationskoeffizienten signifikant an. Für $\rho = 0,4$ erhöht ein System aus vier Verbundmitteln den Sicherheitsindex von 3 auf 4.

Der Eurocode gibt einen Mindestwert für den Zuverlässigkeitsindex β vor. Erhöht sich die Zuverlässigkeit durch n Verbundmittel, kann im Umkehrschluss auch eine höhere Last aufgenommen werden, um den Zuverlässigkeitsindex konstant zu halten. Unter der Annahme, dass die Teilsicherheitsbeiwerte für f_y , f_c und F_E beibehalten werden sollen, wird daher der Teilsicherheitsbeiwert der Verbundmittel γ_V^* iterativ auf γ_V^* angepasst, sodass der ursprüngliche Sicherheitsindex β_{Ziel} konstant bleibt. Für das vorliegende Beispiel führt dies in den meisten Fällen zu einem höheren Bemessungswert P_{Rd}^* der Verbundmittel, siehe Abbildung 6. Demnach haben eine geringere Korrelation und eine höhere Streuung der Dübeltragfähigkeit sowie ein geringerer Zielsicherheitsindex und eine höhere Anzahl von Verbundmitteln einen positiven Systemeffekt.

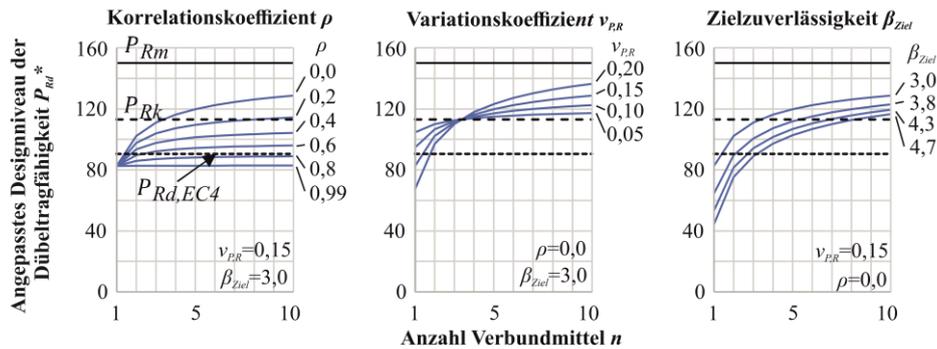


Abbildung 6: Ergebnisse neu kalibrierter Teilsicherheitsbeiwerte für Verbundmittel γ_V^* und resultierender Bemessungskapazität P_{Rd}^* für das vorliegende Beispiel

Für den rekalierten Teilsicherheitsbeiwert γ_V^* duktiler Verbundfugen gilt:

$$\gamma_V^* = \frac{\mu_{P,R} - 1,645 \cdot \sigma_{P,R}}{\mu_{P,R} - \frac{1}{\sqrt{n}} \beta_{Ziel} \cdot \sigma_{P,R} \cdot \sqrt{1 + \rho \cdot (n-1)}} = \frac{1 - 1,645 \cdot v_{P,R}}{1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \beta_{Ziel} \cdot v_{P,R} \cdot \sqrt{1 + \rho \cdot (n-1)}} \quad (8)$$

5 Zusammenfassung

In diesem Artikel wurden die Systemeffekte von spröden und duktilen Verbundmitteln auf die Zuverlässigkeit von Verbundfugen aufgezeigt. Sowohl bei spröden als auch bei duktilen Verbundmitteln lassen sich schon bei wenigen Verbundmitteln sicherheitssteigernde Systemeffekte identifizieren, die in den aktuellen Bemessungsvorschriften nicht berücksichtigt werden. Diese versteckten Sicherheiten hängen von den Randbedingungen und Anfangsverteilungen der zufallsverteilten Parameter ab. Insbesondere bei duktilen Verbundmitteln kann das Sicherheitsniveau bereits mit wenigen Verbundmitteln deutlich erhöht werden.

Literatur

- [1] DIN EN 1994-1-1 Eurocode 4: Bemessung und Konstruktion von Verbundtragwerken aus Stahl und Beton; Teil 1-1: Allgemeine Bemessungs- und Anwendungsregeln für den Hochbau, 2010
- [2] DANIELS, H.E. The statistical theory of the strength of bundles of threads. *Mathematical and Physical Sciences* 183 (1945), S. 405-435
- [3] GOLLWITZER, S. Zuverlässigkeit redundanter Tragsysteme bei geometrischer und stofflicher Nichtlinearität. Dissertation, TU München, 1986
- [4] GOLLWITZER, S.; RACKWITZ, R. On the reliability of Daniels systems. *Structural Safety* 7 (1990), S. 229-243
- [5] TEICHGRÄBER, M.; KÖHLER, J.; STRAUB, D. Redundancy effects in partial safety factor design: A link to a generalized Daniels system. TU München (2023) (Onlineveröffentlichung: <https://www.cee.ed.tum.de/era/publications/>)
- [6] HOHENBICHLER, M.; RACKWITZ, R. On structural reliability of parallel systems. *Reliability Engineering* 2 (1981), S. 1-6
- [7] HOHENBICHLER, M.; RACKWITZ, R. Reliability of Parallel Systems under Imposed Uniform Strain. *Journal of Engineering Mechanics* 109 (1983) S. 896-907
- [8] WOLTERS, K.; FELDMANN, M. Ermüdungsuntersuchungen an Verbundträgern mit Verbunddübelleisten und nachgiebiger Verbundfuge mittels Stabwerkmodellen. *Bauingenieur* 93 (2018) S. 429-437 (DOI: 10.37544/0005-6650-2018-11-47)
- [9] HICKS, S.J. Design shear resistance of headed studs embedded in solid slabs and encasements. *Journal of Constructional Steel Research* 139 (2017), S. 339-352
- [10] SPAETHE, G. Die Sicherheit tragender Baukonstruktionen. Springer, Wien, 1992
- [11] WOLTERS, K.; FELDMANN, M. Probabilistische Untersuchungen zu Systemeffekten in Verbundfugen mit spröden und duktilen Verbundmitteln. *Bauingenieur* 98 (2023), S. 257-267 (DOI: 10.37544/0005-6650-2023-07-08)
- [12] WOLTERS, K.; RITTICH, N.; NONN, J.; FELDMANN, M. Investigations on the system reliability of composite beams by transferring brittle and ductile Daniels systems to the shear connection. *Proceedings in civil engineering, Eurosteel 2023, Amsterdam* (DOI: 10.1002/cepa.2284)