

Numerische Strukturmodellierung mit Polygon-Elementen

Carolin Birk¹, Rama Assaf¹, Muhammad Danish Iqbal¹, Hauke Gravenkamp²

¹Fachgebiet Statik und Dynamik der Tragwerke, Universität Duisburg-Essen,

²International Centre for Numerical Methods in Engineering (CIMNE), Barcelona

Zusammenfassung: Die Finite-Elemente-Methode ist in der Tragwerksplanung allgegenwärtig. Die Erzeugung von FE-Netzen für komplexe Geometrien kann jedoch aufwendig sein. Polygon-Elemente bieten diesbezüglich Vorteile. Quadtree-Netze, die aus quadratischen Polygonen mit mehr als vier Kanten bestehen, können automatisch aus Bilddaten erzeugt werden. Die entsprechenden Elementtechnologien werden vorgestellt und anhand von Beispielen aus der Bruchmechanik illustriert.

1 Einführung

Statische Berechnungen werden in der Tragwerksplanung heutzutage fast ausnahmslos softwaregestützt durchgeführt. Dabei kommt in der Praxis im Allgemeinen die Finite-Elemente-Methode zum Einsatz, die sich prinzipiell zur Lösung nichtlinearer Probleme und zur Beschreibung komplexer Geometrien eignet. Dennoch gibt es Aufgabenstellungen, bei denen die Methode an Grenzen stößt. Als Beispiel sei die Modellierung von Schädigungsprozessen genannt. In diesem Zusammenhang treten Spannungssingularitäten an Rissspitzen auf, in deren Umgebung die Lösung nur mit sehr feinen Netzen hinreichend gut approximiert werden kann. Generell kann die Erzeugung von qualitativ hochwertigen Netzen für komplexe Geometrien sehr aufwendig sein. Insbesondere im Entwurfsprozess, bei dem Geometrien iterativ verändert werden, muss der mit dem Pre-Processing verbundene Aufwand minimiert werden. Einen gewissen Einfluss hat hierbei die Wahl der Elementformulierung. Kommerzielle Finite-Elemente-Programme verfügen über eine begrenzte Auswahl an Elementtypen. Dabei eignen sich Dreieckselemente besser für die Vernetzung komplexer Geometrien, während Viereckselemente sich durch höhere Genauigkeit auszeichnen. Diese lassen sich jedoch schwieriger abstufen, sodass es bei der Vernetzung von Gebieten mit Diskontinuitäten oder feinen geometrischen Details zu einer starken lokalen Verfeinerung kommt.

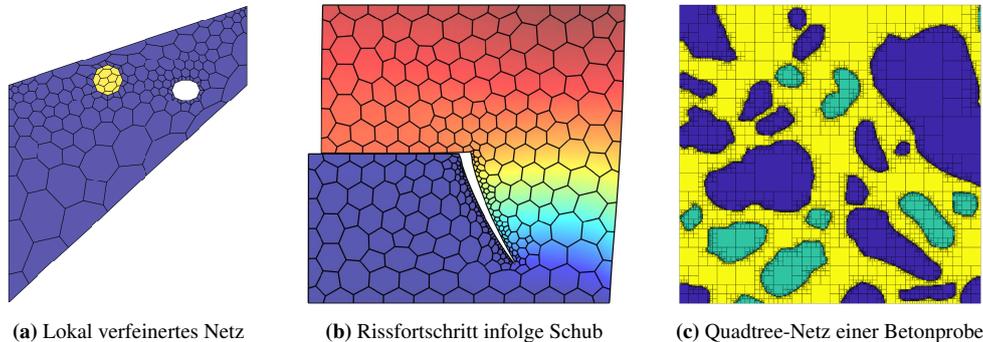


Abbildung 1: Beispiele von Polygonnetzen

In Hinblick auf die oben genannten Herausforderungen bieten Polygon-Elemente bestimmte Vorteile. Sie zeichnen sich durch deutlich höhere Flexibilität bezüglich der Netzgenerierung aus, wie in Abb. 1 illustriert wird. Polygonnetze lassen sich lokal verdichten, ohne dass die Elemente dabei stark verzerrt werden (Abb. 1a). Im Vergleich zu Vierknotenelementen führen sie ggf. bei gleicher Anzahl der Freiheitsgrade zu genaueren Ergebnissen, wie in [11] für den Fall der finiten Elastizität gezeigt wurde. Bei der Simulation von Schädigungsvorgängen können Polygonnetze bei Rissfortschritt lokal modifiziert werden (Abb. 1b). Bei Verwendung semi-analytischer Polygon-Elemente wird außerdem die Spannungssingularität an der Risspitze präzise erfasst [4]. Einen Sonderfall stellen Quadtree-Netze dar, die entstehen, wenn ein quadratisches Gebiet in zu verfeinernden Regionen sukzessive in jeweils vier quadratische Teilgebiete zerlegt wird. Solche Netze zeichnen sich durch effiziente Größenübergänge an Materialgrenzen aus (Abb. 1c). Sie können aus digitalen Bilddaten automatisch erzeugt werden [10].

Im Folgenden wird zunächst ein Überblick über Verfahren zur automatischen Erzeugung von Polygonnetzen gegeben. In Abschnitt 3 wird eine Elementformulierung auf Grundlage der „Scaled Boundary Finite Element Method“ (SBFEM) zusammengefasst. Das Vorgehen wird abschließend anhand von Beispielen aus der Bruchmechanik illustriert.

2 Verfahren zur Netzgenerierung

Polygonnetze, wie in Abb. 1a und 1b gezeigt, können mithilfe von Dreiecksnetzen erzeugt werden, wie in Abb. 2a illustriert. Hierzu werden jeweils die Schwerpunkte der Dreieckselemente zu Polygonen verbunden. Bei Polygonen, die auf dem Rand liegen, werden auch die Mittelpunkte der entsprechenden Dreiecksseiten herangezogen. Das Vorgehen wird im Detail in [9] beschrieben. Abb. 2a zeigt, dass auch offene Polygonelemente konstruiert werden können. Diese werden bspw. in [4] zur Modellierung von fortschreitenden Rissen eingesetzt.

Hierarchische Netze, wie in Abb. 1c gezeigt, können aus Bilddaten erzeugt werden. Hierzu wird ein digitales Bild ggf. zunächst mit einer Hintergrundfarbe ergänzt, sodass sich ein quadratisches Bild der Größe $N \times N$ Pixel mit $N = 2^k$ ergibt. Anschließend wird das quadratische Gebiet immer dann in vier kleinere Quadrate unterteilt, wenn die Farbwerte innerhalb

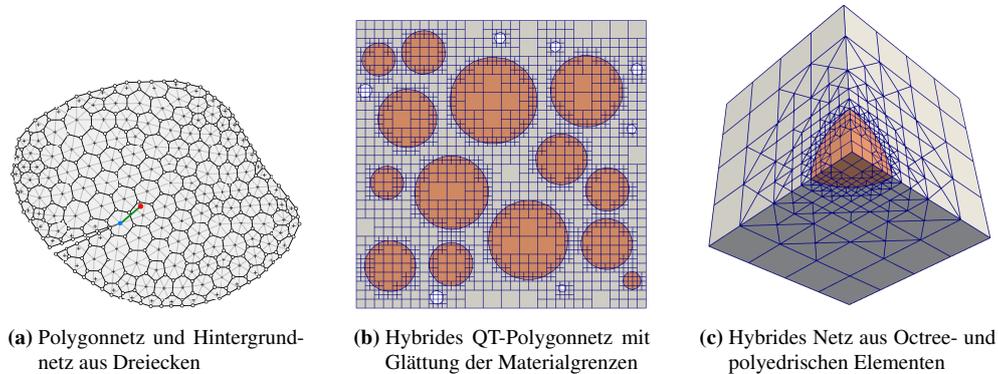


Abbildung 2: Verfahren zur Generierung von Polygonnetzen

des Gebietes nicht homogen sind. Das Vorgehen wird in Abb. 3 illustriert. Die Erweiterung auf 3D ist möglich [10]. Im Ergebnis liegen Quadtree- beziehungsweise Octree-Zerlegungen des Gebietes vor.

Quadtree-Netze führen auf treppenförmige Annäherungen von Materialgrenzen, die unerwünscht sein können. Diese können jedoch nachträglich geglättet werden [2], da sich quadratische Elemente und allgemeinere Polygonelemente parallel verwenden lassen. Ein Beispiel zeigt Abb. 2b. Wenn sich die Materialgrenze analytisch beschreiben lässt, kann die Verschneidung eines hierarchischen Netzes auch mit Hilfe der vorzeichenbehafteten Abstandsfunktion umgesetzt werden [13]. Abb. 2c zeigt beispielhaft ein hybrides Netz aus Octree-Elementen und polyedrischen Elementen zur Beschreibung eines kugelförmigen Einschlusses.

3 Elementformulierung mit der SBFEM

Elementformulierungen für Polygon-Elemente können mit Hilfe der „Scaled Boundary Finite Element Method“ (SBFEM) abgeleitet werden. Die Methode wird im folgenden kurz zusammengefasst. Für detaillierte Herleitungen wird auf [12] verwiesen. Die SBFEM beruht auf der Verwendung einer Koordinatentransformation, die sich für zweidimensionale Gebiete wie folgt darstellt:

$$x = x_0 + \xi x_b(\eta) = x_0 + \xi \mathbf{N}(\eta) \mathbf{x}, \quad (1a)$$

$$y = y_0 + \xi y_b(\eta) = y_0 + \xi \mathbf{N}(\eta) \mathbf{y}. \quad (1b)$$

In Gl. (1) bezeichnen (x, y) kartesische Koordinaten und (ξ, η) lokale Koordinaten, die innerhalb eines Polygons in radialer Richtung beziehungsweise in Umfangsrichtung orientiert sind, wie in Abb. 4a gezeigt. (x_0, y_0) sind die Koordinaten eines festen Punktes O innerhalb des Polygons, von dem aus der gesamte Rand sichtbar ist. Mit der SBFEM konstruierte Polygon-Elemente müssen sternförmig sein. Vom sogenannten Skalierungszentrum O aus werden die kartesischen Koordinaten (x_b, y_b) des Randes gemessen. Diese wiederum ergeben sich aus den Knotenkoordinaten \mathbf{x} bzw. \mathbf{y} durch Interpolation mit den Ansatzfunktionen $\mathbf{N}(\eta)$. Das Verschiebungsfeld $\hat{\mathbf{u}}(x, y)$ wird analog zur Geometrie semi-diskretisiert,

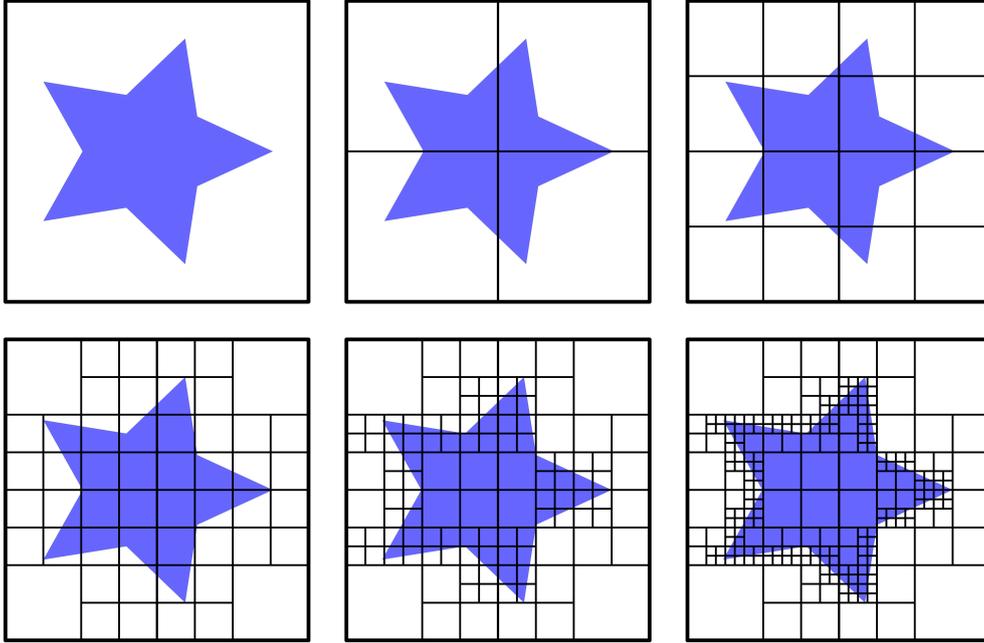


Abbildung 3: Quadtree Zerlegung

$$\hat{\mathbf{u}}(x,y) = \mathbf{N}^u(\eta)\mathbf{u}(\xi). \quad (2)$$

Einsetzen der Koordinatentransformation (1) und des Verschiebungsansatzes (2) in bspw. das Prinzip der virtuellen Arbeit führt für den Fall der linearen Elastostatik auf ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen für die unbekanntenen Verschiebungen $\mathbf{u}(\xi)$. Die homogene Lösung dieser Differentialgleichungen lässt sich wie folgt angeben:

$$\mathbf{u}(\xi) = \Psi_u \xi^{-\lambda} \Psi_u^{-1} \mathbf{u}_b. \quad (3)$$

In Gl. (3) sind Ψ_u und λ Eigenvektoren und Eigenwerte einer zugehörigen Hamiltonschen Matrix [12]. Durch Einsetzen von Gl. (3) in Gl. (2) ergeben sich Ansatzfunktionen $\tilde{\mathbf{N}}(\eta,\xi)$, die eine beliebige Anzahl von Knotenverschiebungen \mathbf{u}_b auf dem diskretisierten Rand eines Polygonelementes interpolieren. Diese ermöglichen die Lösung nichtlinearer und multiphysikalischer Probleme, siehe bspw. [8, 7, 5]. Für lineare Elastizität lässt sich die Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} eines Polygon-Elementes direkt aus den oben erwähnten Eigenvektoren konstruieren,

$$\mathbf{K}_b = \Psi_q \Psi_u^{-1}. \quad (4)$$

Besondere Vorteile bietet die SBFEM bei der Modellierung von Gebieten mit Rissen oder einspringenden Ecken. Hierfür wird das Skalierungszentrum O an die Risspitze gelegt, wie in Abb. 4b gezeigt. Die Rissflanken werden nicht diskretisiert. Die semi-analytische Lösungscharakteristik der SBFEM führt zu einer strengen Erfassung der Spannungssingularität an der

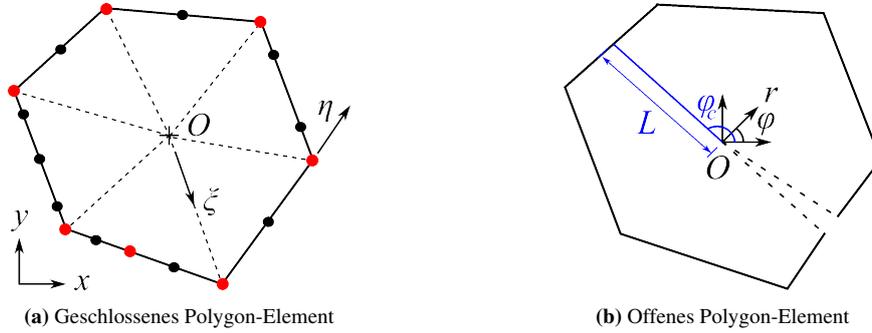


Abbildung 4: Polygon-Elemente auf der Grundlage der SBFEM

Rissspitze. Im linear elastischen Fall gilt für die Spannungen $\sigma^T = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau]$,

$$\sigma = \Psi_\sigma(\eta) \xi^{-\lambda-1} \Psi_u^{-1} \mathbf{u}_b. \quad (5)$$

In Gl. (5) beschreiben die Spannungsmoden Ψ_σ den Verlauf der Spannungen in Umfangsrichtung. Singularitäten zeigen sich durch Eigenwerte $\lambda^{(s)}$ mit $-1 < \lambda^{(s)} < 0$. Die singulären Spannungen $\sigma^{(s)}$ ergeben sich, wenn nur die zugehörigen Moden $\Psi_\sigma^{(s)}$ berücksichtigt werden,

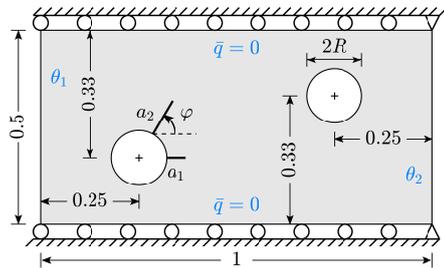
$$\sigma^{(s)}(r, \varphi) = \Psi_{\sigma L}^{(s)}(\eta(\varphi)) (r/L)^{-\lambda^{(s)}-1} \xi^{-\lambda^{(s)}-1} \left(\Psi_u^{(s)} \right)^{-1} \mathbf{u}_b. \quad (6)$$

Die Darstellung in einem an der Rissspitze befindlichen Polarkoordinatensystem (r, φ) ermöglicht die Ableitung der Spannungsintensitätsfaktoren \mathbf{K}_s durch direkten Vergleich mit den klassischen Definitionen,

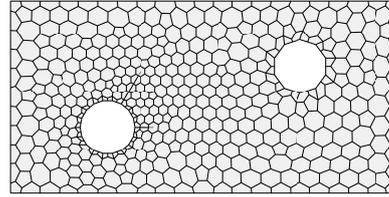
$$\mathbf{K}_s = \sqrt{2\pi L} \Psi_{\sigma L}^{(s)} \left(\Psi_u^{(s)} \right)^{-1} \mathbf{u}_b, \quad \Psi_{\sigma L}^{(s)}(\eta(\varphi)) = \Psi_\sigma(\eta(\varphi)) (L/r)^{-\lambda^{(s)}-1}. \quad (7)$$

Die Spannungsintensitätsfaktoren \mathbf{K}_s dienen als Indikatoren für den Rissfortschritt.

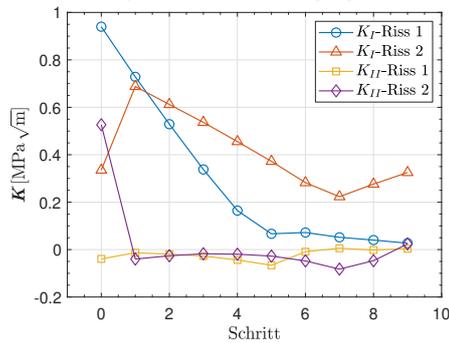
Alternativ können Risse verschmiert dargestellt werden. Im Rahmen der Phasenfeldmethode (PFM) wird hierfür eine zusätzliche Größe d eingeführt – die Phasenfeldvariable, welche Diskontinuitäten annähert. Es gilt $0 \leq d \leq 1$ für den intakten, beziehungsweise vollständig gerissenen Zustand. Die PFM führt auf gekoppelte Differentialgleichungen für die Phasenfeldvariable d und das Verschiebungsfeld \mathbf{u} . Diese können iterativ gelöst werden. In jedem Iterationsschritt werden zwei entkoppelte Teilprobleme betrachtet, wobei jeweils nur eine der beiden physikalischen Größen unbekannt ist. Beide Teilprobleme können unter gewissen Voraussetzungen semi-analytisch mit der SBFEM gelöst werden. In [1] wird dazu einerseits ein hybrider Ansatz zur Beschreibung der Schädigungsevolution herangezogen und andererseits angenommen, dass die Phasenfeldvariable beziehungsweise die Dehnungen innerhalb eines Elementes als konstant angenommen werden können, während jeweils für die Verschiebungen beziehungsweise für die Phasenfeldvariable gelöst wird. Die PFM erfordert die Verwendung sehr feiner Netze in geschädigten Zonen. Polyedrische Netze auf Grundlage der SBFEM ermöglichen hier rapide Größenübergänge inklusive adaptiver Verfeinerung.



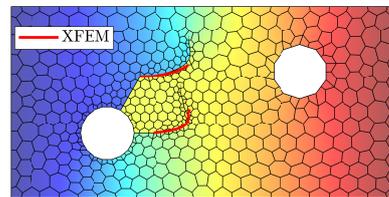
(a) System und Randbedingungen



(b) Netz vor Rissfortschritt



(c) Spannungsintensitätsfaktoren



(d) Risspfade und Temperaturverteilung

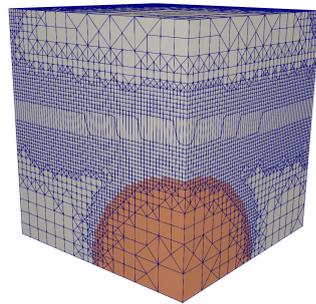
Abbildung 5: Perforierte Platte mit zwei Rissen unter thermischer Belastung. Abmessungen: $a_1 = 0,05 \text{ m}$, $a_2 = 0,1 \text{ m}$, $\varphi = 80^\circ$, $R = 0,07 \text{ m}$. Materialparameter: $E = 2,184 \text{ MPa}$, $\nu = 0,3$, $\alpha = 1,67 \times 10^{-4} \text{ (K)}^{-1}$

4 Anwendungen aus der Bruchmechanik

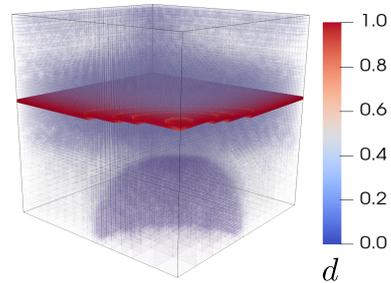
Die vorgestellten Konzepte werden anhand von zwei Beispielen aus der Bruchmechanik illustriert.

4.1 Thermisch-induzierter Bruch einer perforierten Platte

Betrachtet wird das in Abb. 5a gezeigte System. Angenommen wird ein ebener Verzerrungszustand. Am linken bzw. rechten Rand werden unterschiedliche Temperaturen in Höhe von $\theta_1 = -20^\circ\text{C}$ und $\theta_2 = +20^\circ\text{C}$ aufgebracht. Die Referenztemperatur beträgt $\theta_0 = 0^\circ\text{C}$. Die Simulation des thermisch-induzierten Bruchvorgangs erfolgt nach [4] mit einem Rissinkrement von $\Delta a = 0,02 \text{ m}$. Das Gebiet wird mit 453 Polygonen vernetzt, wie in Abb. 5b dargestellt. Während des Rissfortschritts werden nur die in der Nähe des Risses befindlichen Polygone verfeinert, sodass sich schlussendlich 542 Polygon-Elemente ergeben. Abb. 5c zeigt den Verlauf der Spannungsintensitätsfaktoren. Die gegebene thermische Belastung führt zu gemischter Beanspruchung in den Moden I und II, was sich auch im gekrümmten Rissverlauf in Abb. 5d zeigt. Die Risspfade stimmen gut mit der Referenzlösung [3] überein.



(a) Lokal verfeinertes Netz: Verformungen



(b) Phasenfeldvariable

Abbildung 6: Zugversuch an einer würfelförmigen Probe mit kugelförmigem Einschluss. Kantenlänge $a = 4$ mm, Radius $r = 10$ mm. Materialparameter: $\lambda = 12$ kN/mm², $\mu = 8$ kN/mm², $G_c = 5 \times 10^{-5}$ kN/mm. Längenparameter $l_0 = 0,1$ mm

4.2 Phasenfeldmodellierung

Untersucht wird eine würfelförmige Probe mit starrem kugelförmigen Einschluss unter Zugspannungen. Modelliert wird nur ein Achtel der Geometrie aus Symmetriegründen. Der Bruchvorgang wird mit einer adaptiven Phasenfeldformulierung auf Grundlage der SBFEM simuliert [1]. Das Ausgangsnetz besteht aus ca. 6.500 polyedrischen Elementen mit insgesamt etwa 12.000 Knoten. Es ist nur in der Nähe der Kugeloberfläche lokal verfeinert, um die geometrische Diskontinuität abbilden zu können. Es bildet sich eine nahezu horizontale Bruchfläche oberhalb der Kugel heraus, wie in Abb. 6b zu sehen ist. Während der schrittweisen Erhöhung der eingepprägten Verformung in vertikaler Richtung wird das Netz automatisch in der Nähe dieser Bruchfläche verfeinert, wodurch sich die Anzahl der Knoten etwa verzehnfacht. Abb. 6a zeigt das endgültige Netz im verformten Zustand. Eine Referenzlösung findet sich in [6]. Die Bruchflächen stimmen sehr gut überein.

Danksagung

Gefördert durch die Deutsche Forschungsgemeinschaft - 444616865. Die Autoren/innen danken Herrn Siva Lingala, M.Sc. für die Implementierung des Algorithmus zur Verschneidung von Octree-Elementen mit geometrisch definierten Grenzflächen im Rahmen seiner Masterarbeit an der Universität Duisburg-Essen.

Literatur

- [1] ASSAF, R.; BIRK, C.; NATARAJAN, S.; GRAVENKAMP, H.: Three-dimensional phase-field modeling of brittle fracture using an adaptive octree-based scaled boundary finite element approach. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 399 (2022), S. 115364

- [2] GUO, H.; OOI, E. T.; SAPUTRA, A. A.; YANG, Z.; NATARAJAN, S.; OOI, E. H.; SONG, C.: A quadtree-polygon-based scaled boundary finite element method for image-based mesoscale fracture modelling in concrete. In: *Engineering Fracture Mechanics* 211 (2019), S. 420–441
- [3] HABIB, F.; SORELLI, L.; FAFARD, M.: Full thermo-mechanical coupling using eXtended Finite Element Method in quasi-transient crack propagation. In: *Advanced Modeling and Simulation in Engineering Sciences* 5.1 (2018), S. 18
- [4] IQBAL, M. D.; BIRK, C.; OOI, E. T.; GRAVENKAMP, H.: Development of the scaled boundary finite element method for crack propagation modeling of elastic solids subjected to coupled thermo-mechanical loads. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 387 (2021), S. 110106
- [5] IQBAL, M. D.; BIRK, C.; OOI, E. T.; NATARAJAN, S.; GRAVENKAMP, H.: Transient thermoelastic fracture analysis of functionally graded materials using the scaled boundary finite element method. In: *Theoretical and Applied Fracture Mechanics* 127 (2023), S. 104056
- [6] MIEHE, C.; WELSCHINGER, F.; HOFACKER, M.: Thermodynamically consistent phase-field models of fracture: Variational principles and multi-field FE implementations. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 83 (2010), S. 1273–1311
- [7] OOI, E. T.; SONG, C.; NATARAJAN, S.: A scaled boundary finite element formulation for poroelasticity. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 114 (2018), S. 905–929
- [8] OOI, E. T.; SONG, C.; TIN-LOI, F.: A scaled boundary polygon formulation for elastoplastic analyses. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 268 (2014), S. 905–937
- [9] OOI, E. T.; SONG, C.; TIN-LOI, F.; YANG, Z.: Polygon scaled boundary finite elements for crack propagation modelling. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 91 (2012), S. 319–342
- [10] SAPUTRA, A.; TALEBI, H.; TRAN, D.; BIRK, C.; SONG, C.: Automatic image-based stress analysis by the scaled boundary finite element method. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 109 (2017), S. 697–738
- [11] SAUREN, B.; KLARMANN, S.; KOBELT, L.; KLINKEL, S.: A mixed polygonal finite element formulation for nearly-incompressible finite elasticity. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 403, Part A (2023), S. 115656
- [12] SONG, C.: *The Scaled Boundary Finite Element Method: Introduction to Theory and Implementation*. Hoboken, New Jersey : John Wiley & Sons Ltd., 2018
- [13] TALEBI, H.; SAPUTRA, A.; SONG, C.: Stress analysis of 3D complex geometries using the scaled boundary polyhedral finite elements. In: *Computational Mechanics* 58 (2016), S. 697–715