

Vergleich zwischen isogeometrischen und spektralen Reissner-Mindlin Schalenelementen

Wolfgang Dornisch, Nima Azizi

Fachgebiet Statik und Dynamik, Brandenburgische Technische Universität Cottbus-Senftenberg

Zusammenfassung: Der Beitrag vergleicht die Genauigkeit von Reissner-Mindlin-Schalenelementen zwischen der isogeometrischen Methode und der spektralen Elemente-Methode. Während die erste durch die hohe Kontinuität zwischen den Elementen eine sehr hohe Genauigkeit in Bezug auf Anzahl der Freiheitsgrade aufweist, besticht die letztere durch eine einfachere Formulierung und eine bessere Konditionierung auch für sehr hohe Ansatzordnungen.

1 Einleitung

Aufgrund Ihres günstigen Verhältnisses von Eigengewicht zu abtragbarer Last sind Schalentragwerke sowohl in der Natur als auch in Tragwerken aller Art weit verbreitet. Erste Ansätze zur Berechnung solcher dünnwandigen Tragwerke gehen auf Kirchoff [10] und Love [11] zurück. In den letzten 50 Jahren hat sich die Finite-Elemente-Methode, meist basierend auf linearen oder quadratischen Lagrange-Funktionen, zur Berechnung von Schalentragwerken durchgesetzt [5]. Erst mit größerem zeitlichen Abstand hat sich seit den 1980er Jahren der spline-basierte computer-gestützte Entwurf von Schalentragwerken mit Computer-Aided Design (CAD)-Systemen entwickelt [5]. Die Idee der isogeometrischen Analyse, vorgeschlagen von Hughes et al. [8], versucht sich in einer Zusammenführung von Entwurf und Berechnung durch eine gemeinsame, spline-basierte Geometriebeschreibung. Erste isogeometrische Schalenformulierungen wurden in [4, 9] vorgestellt. Weiterentwicklungen zu angepasster Interpolation von Rotationen [6, 7] und der Verhinderung von Locking [14] haben zu effizienten und präzisen Formulierungen geführt, welche jedoch sowohl theoretisch komplex sind als auch relativ hohe Berechnungskosten auf Elementebene aufweisen. Die Komplexität dieser Formulierungen liegt vor allem in der hohen Kontinuität der spline-Funktionen zwischen den einzelnen Elementen begründet. Aufbauend auf diesem Gedanken, wird in einem aktuellen Forschungsprojekt [1] zwar die Geometrie durch spline-Funktionen beschrieben, aber die unbekanntes Größen werden durch Lagrange-Ansatzfunktionen höherer Ordnung beschrieben,

wobei die Integration mit einer Gauß-Lobatto-Legendre-Quadratur (GLL) erfolgt. Somit werden die Vorteile von spektralen Elementen [12, 13, 2], welche die Verwendung hoher Ansatzordnungen mit stabiler Konditionszahl zur Verhinderung von Locking ermöglichen, mit der exakten Geometriebeschreibung der isogeometrischen Analyse verbunden. In diesem Beitrag wird die erzielbare Genauigkeit einer rein isogeometrischen Schalenformulierung nach [7] mit einer rein spektralen Schalenformulierung anhand zweier Beispiele verglichen.

2 Grundzüge der Reissner-Mindlin-Schalentheorie

Die Grundidee einer Reissner-Mindlin-Schalenformulierung ist die Beschreibung eines dünnwandigen Körpers $\tilde{X}(\xi^i)$ durch eine zweiparametrische Fläche im Raum $X(\xi^\alpha)$ mit einem Vektorfeld $D(\xi^\alpha)$, welches die Dickenrichtung ξ^3 definiert. Somit wird ein beliebiger Punkt in der Ausgangslage durch

$$\tilde{X}(\xi^i) = X(\xi^\alpha) + \xi^3 D(\xi^\alpha) \quad (1)$$

beschrieben, siehe Abb. 1. Analog dazu wird die verformte Lage durch Kleinbuchstaben

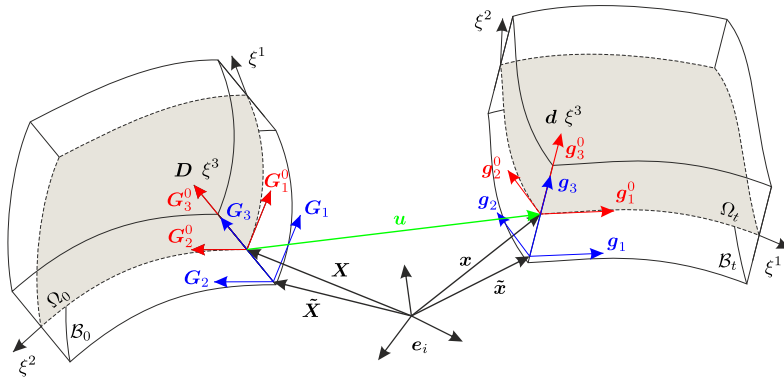


Abbildung 1: Kinematik der verwendeten Reissner-Mindlin-Schalentheorie

beschrieben. Für das Integral der inneren Arbeit muss die verformte Lage der Schalenmitelfläche $x(\xi^\alpha)$ und der verformte Vektor der Dickenrichtung $d(\xi^\alpha)$ approximiert werden. Während die Approximation von $x(\xi^\alpha)$ trivial ist, und hier einfach durch die jeweiligen Ansatzfunktionen erfolgt, gibt es für die Approximation von $d(\xi^\alpha)$ zahlreiche verschiedene Ansätze in der Literatur. In dieser Arbeit werden die zwei in [7] verglichenen Diskretisierungsarten, beide basierend auf dem Rodrigues-Tensor $R(\omega)$, verwendet.

3 Diskretisierung

Die beiden betrachteten Schalenformulierungen unterscheiden sich sowohl in der Art der gewählten Basisfunktionen als auch in der verwendeten diskreten Rotationsformulierung.

3.1 Isogeometrische Finite-Elemente

Für die isogeometrische Finite-Elemente-Methode werden Non-Uniform Rational B-splines (NURBS)-Basisfunktionen N_I^N verwendet. Diese werden mit den Koordinaten der Kontrollpunkte \mathbf{X}_I multipliziert um die exakte Geometrie $\mathbf{X} = \sum_I N_I^N \mathbf{X}_I$ zu erhalten. Details zur Berechnung der NURBS-Ansatzfunktionen N_I^N finden sich in [5]. Der verformte Dickenrichtungsvektor $\mathbf{d}(\xi^\alpha)$ bestimmt sich durch die in [7] vorgeschlagene kontinuierliche Rotation

$$\mathbf{d}(\xi^\alpha) = \mathbf{R} \left(\sum_I N_I^N \omega_I \right) \mathbf{D}(\xi^\alpha). \quad (2)$$

3.2 Spektrale Finite-Elemente

Für die spektrale Finite-Elemente-Methode werden Lagrange-Basisfunktionen verwendet, wobei die Positionen der zugeordneten ungleichmäßig angeordneten Knoten durch die Nullstellen der Legendre-Polynome bestimmt werden. Für Elemente der Ordnung p ergeben sich $(p+1)^2$ Knoten, deren Anordnung im $[-1,1]^2$ -Parameterraum für jedes Element gleich ist. Durch die Verwendung der GLL-Quadratur fallen die Integrationspunkte mit den Knotenpunkten zusammen und in jedem Integrationspunkt ist nur eine Ansatzfunktion ungleich Null. Details zur Berechnung der Lagrange Ansatzfunktionen N_I^L finden sich in [1]. Da in den Integrationspunkten aufgrund des interpolatorischen Charakters der Lagrange-Basisfunktionen immer die Basisfunktion des dort liegenden Knoten gleich Eins ist, kann die in [7] untersuchte diskrete Rotationsformulierung

$$\mathbf{d}(\xi^\alpha) = \sum_I N_I^L \mathbf{R}(\omega_I) \mathbf{D}_I \quad (3)$$

verwendet werden, ohne die Dicke der Schalen zu verfälschen. Hierbei ist \mathbf{D}_I die lokale Dicke am Knoten I .

4 Numerische Beispiele

Der Vergleich der beiden vorgestellten Formulierungen erfolgt anhand zweier numerischer Beispiele, welche geometrisch linear berechnet wurden. Das erste Beispiel ist dem oftmals verwendeten „shell obstacle course“ aus [3] entnommen und ist ein klassisches Beispiel zur Validierung von Schalenformulierungen. Hierbei werden vor allem die korrekte Behandlung von reiner Biegung und komplexe Membran-Zustände getestet. Aufgrund der konstanten Krümmung und der einfachen Geometrie ist sowohl der Einfluss der Genauigkeit der Rotationsbeschreibung als auch der Einfluss einer exakten Geometriebeschreibung nicht besonders ausgeprägt [6]. Folglich wird als zweites Beispiel die in [6] vorgeschlagene Freiformfläche betrachtet. Dieses Beispiel weist eine stark veränderliche Krümmung auf, somit hat die exakte Beschreibung der Geometrie und die Rotations-Interpolation einen bedeutend größeren Einfluss.

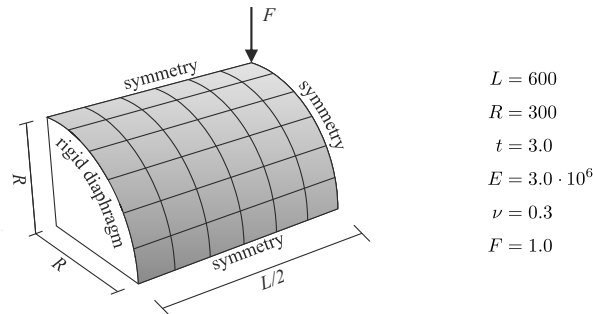


Abbildung 2: Zylinder unter Punktbelastung: Systemskizze und Materialdaten

4.1 Zylinder unter Punktbelastung

System und Materialkennwerte des Zylinders unter Punktbelastung sind in Abb. 2 gegeben, eine detaillierte Beschreibung der angewendeten Randbedingungen findet sich in [6]. Die Verformungsergebnisse für IGA und SEM sind auf eine Referenzverformung $w = 1,83 \cdot 10^{-5}$ normalisiert. In Abb. 3 sind die Verformungen für Netzverfeinerung bei jeweils gleichbleibender Ordnung dargestellt. Auf der linken Seite wird die Anzahl der Elemente je Richtung als Abszisse verwendet. Die Ergebnisse zeigen, dass bereits 2×2 SEM-Elemente der Ansatzordnung $p = 8$ ausreichend sind, um die Referenzlösung zu erreichen. Im Vergleich zwischen den IGA- und den SEM-Lösungen zeigt sich, dass bei gleicher Anzahl der Elemente die SEM-Lösung immer bessere Ergebnisse als die IGA-Lösung liefert. Dies ist sicherlich darin begründet, dass durch die C^0 -Kontinuität der SEM-Ansatzfunktionen die Gesamtanzahl der Freiheitsgrade bei gleicher Elementanzahl bei SEM gegenüber IGA bedeutend höher ist. Dies ist auf der rechten Seite von Abb. 3, bei der die gesamte Anzahl der Freiheitsgrade als Abszisse verwendet wird, gut zu erkennen. Die sehr hohe Genauigkeit von SEM-Berechnungen hoher Ordnung mit wenigen Elementen, die auf der linken Seite von Abb. 3 zu sehen ist, zeigt aber auch, dass die inexakte Beschreibung der Geometrie bei der SEM-Lösung keinen signifikanten Einfluss auf die Lösungsgüte hat. Das Verhalten beider Formulierungen für eine reine Ordnungserhöhung bei einem Netz mit nur einem Element ist in Abb. 4 zu sehen. Als Abszisse ist hier nur der Ansatzgrad verwendet, da die gesamte Anzahl der Freiheitsgrade bei nur einem Element für IGA und SEM gleich ist. Somit ist klar zu erkennen, dass bei dieser relativ einfachen Geometrie keinerlei Vorteil durch die exakte Geometriebeschreibung der IGA entsteht. Die SEM-Ergebnisse sind sogar für $p > 4$ etwas besser als die IGA-Ergebnisse.

4.2 Freiformfläche

System und Materialkennwerte der Freiformfläche sind in Abb. 5 gegeben. Die untere Kante ($z = 0$) ist dabei komplett eingespannt, und entlang der oberen Kante ($z = 15$) wird eine Gleichstreckenlast aufgebracht. Alle Daten zum Konstruieren der Fläche, welche eine Ausgangsordnung von $p = 3$ hat und aus 3×3 Elementen besteht, sind in [6] gegeben. In Abb. 6 ist auf der linken Seite das unverfeinerte Netz mitsamt den Kontrollpunkten gegeben. Auf der rechten Seite ist die durch ein Element mit Lagrange-Funktionen der Ordnung

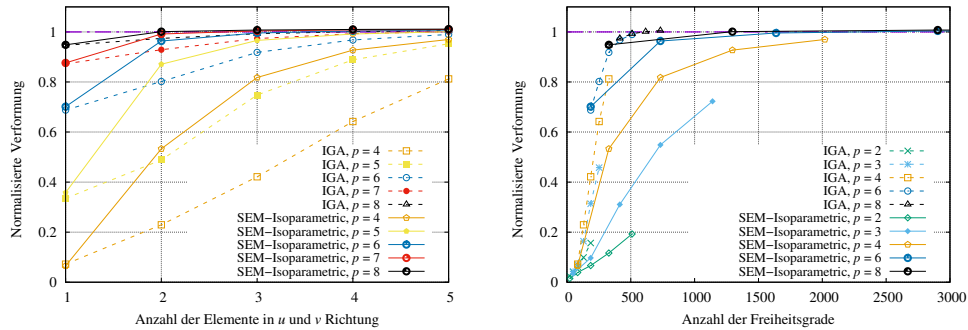


Abbildung 3: Zylinder unter Punktbelastung: Vergleich der Verformung zwischen IGA und SEM für Netzverfeinerung (h -refinement) in Abhängigkeit der Anzahl der Elemente (links) und der Freiheitsgrade (rechts)

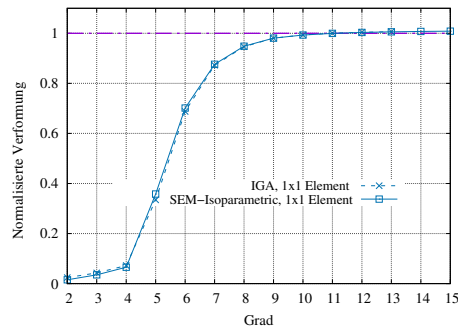


Abbildung 4: Zylinder unter Punktbelastung: Vergleich der Verformung zwischen IGA und SEM für Ordnungserhöhung (p -refinement) in Abhängigkeit der Ansatzordnung

$p = 5$ genäherte Fläche dargestellt. Die Verformungsergebnisse für IGA und SEM sind auf eine Referenzverformung $w = 1,02786$ normalisiert. In Abb. 7 sind die Verformungen für Netzverfeinerung bei jeweils gleichbleibender Ordnung dargestellt. Auf der linken Seite wird die Anzahl der Elemente je Richtung als Abszisse verwendet. Hierbei ist zu beachten, dass für die IGA-Berechnungen die exakte Geometrie verfeinert wird. Dadurch können nur Vernetzungen mit Vielfachen von 3 verwendet werden. Für die SEM-Diskretisierungen sind die Diskretisierungen jeweils Näherungen, hier kann eine beliebige Anzahl an Elementen verwendet werden. Für die Ordnungen $p = 3$ und $p = 4$ liefert SEM bei gleicher Elementanzahl bedeutend bessere Ergebnisse. Ab $p = 5$ liegen die IGA- und die SEM-Ergebnisse sehr nahe zusammen. Bereits 3×3 SEM-Elemente der Ansatzordnung $p = 8$ sind ausreichend, um die Referenzlösung zu erreichen. Betrachtet man die normalisierte Verformung in Abhängigkeit der Anzahl der Freiheitsgrade auf der rechten Seite von Abb. 7, dann sind die IGA-Ergebnisse etwas besser als die SEM-Ergebnisse. Hier gilt es jedoch zu beachten, dass IGA-Steifigkeitsmatrizen durch die hohe Kontinuität bedeutend dichter besetzt sind als vergleichbar große SEM-Steifigkeitsmatrizen. Insofern kann aus der Anzahl der Freiheitsgrade nicht direkt auf die Lösungskosten des Gleichungssystems geschlossen werden. Das Verhal-

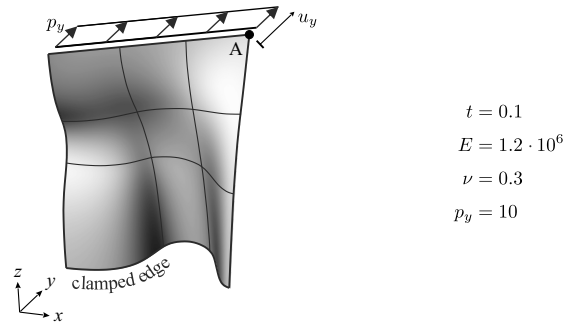


Abbildung 5: Freiformfläche: Systemskizze und Materialdaten

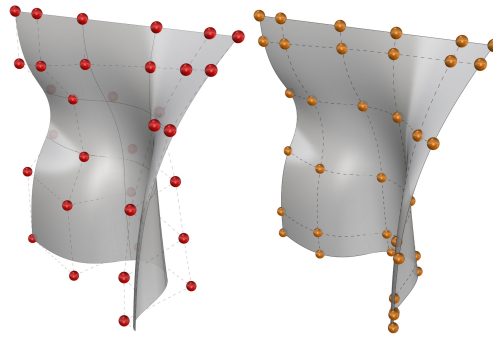


Abbildung 6: Freiformfläche: Kontrollpunkte der NURBS-Fläche (links) und Knotenpunkte des SEM-Netzes (rechts)

ten beider Formulierungen für eine reine Ordnungserhöhung bei einem Netz mit nur einem SEM-Element beziehungsweise 3×3 IGA-Elementen ist in Abb. 8 zu sehen. Auf der linken Seite ist der Ansatzgrad als Abszisse verwendet. Hier sind die IGA-Ergebnisse aufgrund der größeren Anzahl an Elementen klar besser als die SEM-Ergebnisse. In den SEM-Ergebnissen sind leichte Oszillationen erkennbar. Dies erklärt sich durch die wechselnde Position der Knoten durch die Verfeinerung. Ab $p = 14$ wird mit nur einem Element die Referenzlösung sehr gut getroffen. Bezieht man die Ergebnisse auf die Anzahl der Freiheitsgrade, so ergibt sich ein komplett anderes Bild. Wie in Abb. 8 auf der rechten Seite zu sehen ist, liegt die SEM-Ergebniskurve immer über der IGA-Kurve. Hieraus lässt sich auch wieder folgern, dass die exakte Geometriebeschreibung für die Genauigkeit der Berechnungen eine untergeordnete Rolle spielt. Auch mit der SEM-Formulierung mit genäherter Geometrie können hochpräzise Ergebnisse erzielt werden. Die IGA-Ergebnisse sind bezogen auf die Anzahl der Freiheitsgrade in diesem Beispiel den SEM-Ergebnissen nicht überlegen, da die IGA-Geometrie begrenzte Kontinuität aufweist.

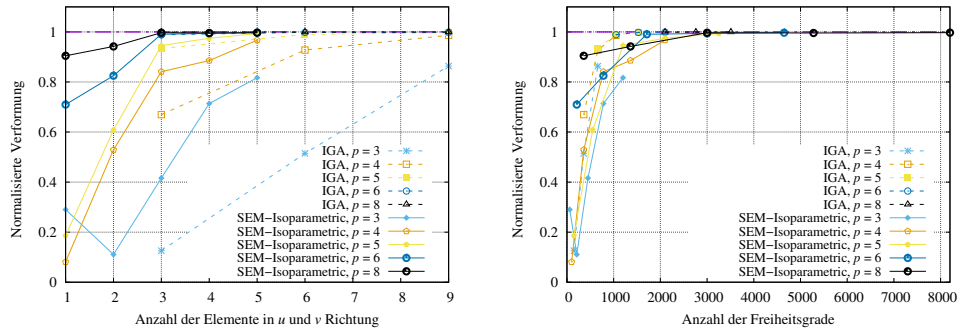


Abbildung 7: Freiformfläche: Vergleich der Verformung zwischen IGA und SEM für Netzverfeinerung (h -refinement) in Abhängigkeit der Anzahl der Elemente (links) und der Freiheitsgrade (rechts)

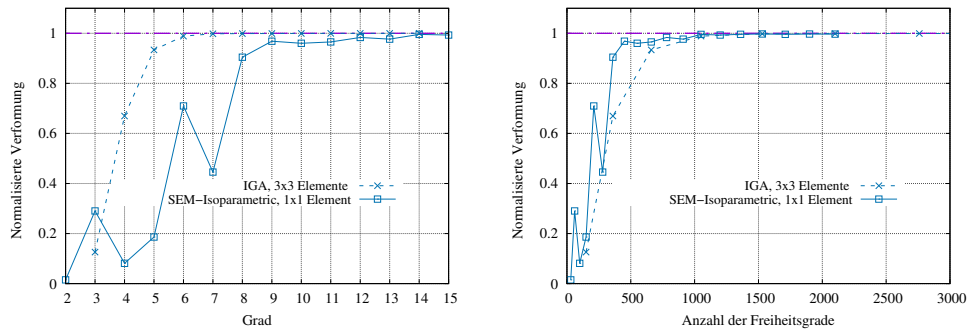


Abbildung 8: Freiformfläche: Vergleich der Verformung zwischen IGA und SEM für Ordnungserhöhung (p -refinement) in Abhängigkeit der Ansatzordnung (links) und der Freiheitsgrade (rechts)

5 Fazit und Ausblick

Der vorgestellte Vergleich zwischen einer IGA und einer SEM-Schalenformulierung zeigt auf, dass SEM-basierte Berechnungen trotz genäherter Geometrie ähnlich hohe Effizienz wie IGA-Berechnungen aufweisen können. In realitätsnahen Beispielen mit begrenzter Kontinuität schrumpft der Vorteil der IGA, und die Ergebnisse sind sehr ähnlich. Somit können die Vorteile der SEM überwiegen; diese sind die konzeptuell einfachere Rotationsformulierung und die bessere Konditionierung bei sehr hohen Ansatzgraden, wie in [1] gezeigt wird. Durch die Verwendung hoher Ansatzgrade sollen Methoden gegen Locking obsolet werden.

Danksagung

Gefördert durch die Deutsche Forschungsgemeinschaft (DFG) – Projektnummer 503246947.

Literatur

- [1] AZIZI, N. ; DORNISCH, W. : A spectral finite element Reissner-Mindlin shell formulation with NURBS-based geometry definition. In: *submitted to Comp. Mech.* (2023)
- [2] AZIZI, N. ; SAADATPOUR, M. ; MAHZOON, M. : Analyzing first symmetric and anti-symmetric Lamb wave modes in functionally graded thick plates by using spectral plate elements. In: *Int. J. Mech. Sci.* 150 (2019), S. 484–494
- [3] BELYTSCHKO, T. ; STOLARSKI, H. ; LIU, W. K. ; CARPENTER, N. ; ONG, J. S.-J. : Stress Projection for Membrane and Shear Locking in Shell Finite Elements. In: *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 51 (1985), Nr. 1-3, S. 221–258
- [4] BENSON, D. J. ; BAZILEVS, Y. ; HSU, M.-C. ; HUGHES, T. J. R.: Isogeometric shell analysis: The Reissner–Mindlin shell. In: *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 199 (2010), S. 276–289
- [5] COTTRELL, J. A. ; HUGHES, T. J. R. ; BAZILEVS, Y. : *Isogeometric analysis: Toward integration of CAD and FEA.* Chichester : Wiley, 2009. – ISBN 978–0–470–74873–2
- [6] DORNISCH, W. ; KLINKEL, S. ; SIMEON, B. : Isogeometric Reissner–Mindlin shell analysis with exactly calculated director vectors. In: *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 253 (2013), S. 491–504
- [7] DORNISCH, W. ; MÜLLER, R. ; KLINKEL, S. : An efficient and robust rotational formulation for isogeometric Reissner–Mindlin shell elements. In: *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 303 (2016), S. 1–34
- [8] HUGHES, T. J. R. ; COTTRELL, J. A. ; BAZILEVS, Y. : Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement. In: *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 194 (2005), S. 4135–4195
- [9] KIENDL, J. ; BLETZINGER, K.-U. ; LINHARD, J. ; WÜCHNER, R. : Isogeometric shell analysis with Kirchhoff-Love elements. In: *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 198 (2009), S. 3902–3914
- [10] KIRCHHOFF, G. : Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe. In: *J. Reine Angew. Math.* 40 (1850), S. 51–88
- [11] LOVE, A. E. H.: On the Small Vibrations and Deformations of Thin Elastic Shells. In: *Philos. Trans. R. Soc. Lond., A* 179 (1888), S. 491–546
- [12] PATERA, A. T.: A spectral element method for fluid dynamics: Laminar flow in a channel expansion. In: *J. Comput. Phys.* 54 (1984), Nr. 3, S. 468–488
- [13] PAYETTE, G. ; REDDY, J. : A seven-parameter spectral/hp finite element formulation for isotropic, laminated composite and functionally graded shell structures. In: *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 278 (2014), S. 664–704
- [14] ZOU, Z. ; SCOTT, M. A. ; MIAO, D. ; BISCHOFF, M. ; OESTERLE, B. ; DORNISCH, W. : An isogeometric Reissner–Mindlin shell element based on Bézier dual basis functions: Overcoming locking and improved coarse mesh accuracy. In: *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 370 (2020), S. 113283