

Alternative Beurteilung von Tragwerken mit Hilfe der Redundanzmatrix

David Forster, Malte von Scheven, Manfred Bischoff

Universität Stuttgart, Institut für Baustatik und Baudynamik

Zusammenfassung: Zur Analyse von Tragwerken ist es in frühen Entwurfsphasen häufig ausreichend, Schnitt- und Verschiebungsgrößen, sowie Spannungen im Rahmen der linearen Elastizitätstheorie zu bestimmen. Eine weitere fundamentale Eigenschaft von Tragwerken ist der Grad der statischen Unbestimmtheit und deren Verteilung innerhalb des Tragwerks. Die Redundanzmatrix liefert diese Information und stellt damit ein lastfallunabhängiges Maß zur Beurteilung von Tragwerken hinsichtlich Robustheit, Assemblierbarkeit und Adaptierbarkeit zur Verfügung.

1 Einleitung

Im Rahmen des Entwurfs eines Gebäudes spielen neben ästhetischen und wirtschaftlichen Aspekten die Gebrauchstauglichkeit und die Tragfähigkeit der lastabtragenden Struktur eine entscheidende Rolle. Nationale und internationale Normen basieren auf semiprobabilistischen Konzepten, bei denen häufig lineare Berechnungen mit Teilsicherheitsbeiwerten zum Nachweis der Standsicherheit genügen. Darüber hinaus können materiell nichtlineare Effekte bei der Ermittlung der Traglast berücksichtigt werden. Untersuchungen zum Knick- bzw. Beulverhalten berücksichtigen geometrisch nichtlineare Effekte. Diese Konzepte sind in der Praxis etabliert und in Normen verankert. Als Strategien zur Behandlung außergewöhnlicher Bemessungssituationen wird im Eurocode eine verbesserte Redundanz durch alternative Lastpfade, sowie ein Tragwerksentwurf mit ausreichender Robustheit vorgeschlagen [2]. Beide Eigenschaften werden jedoch nur vage definiert. Eine Beurteilung des Tragwerks hinsichtlich der Assemblierbarkeit oder des Montageprozesses wird nicht berücksichtigt. Für die Beurteilung solcher Tragwerkeigenschaften eignet sich die Redundanzmatrix, insbesondere in frühen Entwurfsphasen, als lastfallunabhängiges Maß.

Im Beitrag von Maxwell aus dem Jahr 1864 wird der Grad der statischen Unbestimmtheit als Tragwerkeigenschaft eingeführt [6]. Um diese Eigenschaft sinnvoll zur Beurteilung von Tragwerken verwenden zu können, ist nicht nur der Grad der statischen Unbestimmtheit der gesamten Struktur, sondern deren Verteilung im Tragwerk bedeutsam. Die Verteilung der

statischen Unbestimmtheit innerhalb eines Tragwerks kann mit Hilfe der Redundanzmatrix berechnet werden [1, 8, 9]. Auch die Auswirkung von imperfekt gefertigten Elementen auf den Spannungszustand innerhalb eines Tragwerks kann mit der Redundanzmatrix quantifiziert werden. Im Interesse eines optimalen Montageprozesses kann es beispielsweise nützlich sein, möglichst wenig Zwangsspannungen in das Tragwerk einzutragen [3]. Für den Entwurf eines robusten Tragwerks ist es hingegen wichtig, dass die statische Unbestimmtheit im gesamten Tragwerk verteilt wird, ohne dass statisch bestimmte Substrukturen vorhanden sind, deren Versagen das gesamte Tragwerk unbrauchbar machen können [1, 3]. Die Redundanzmatrix liefert zudem Informationen zu Eigenspannungszuständen und spannungsfreien Verformungszuständen, die auch in [7] thematisiert werden. Dies ermöglicht eine Verwendung der Redundanzmatrix bei der Beurteilung adaptiver Strukturen [4, 5].

Im Rahmen dieses Beitrags werden zunächst die Grundlagen der Berechnung der Redundanzmatrix vorgestellt. Anschließend wird die Verwendung der Redundanzmatrix bei der Beurteilung von Tragwerken anhand der drei Beispiele Robustheit, Assemblierbarkeit und Adaptierbarkeit verdeutlicht.

2 Redundanzmatrix für Stabtragwerke

Zunächst wird die Herleitung der Redundanzmatrix in Matrixschreibweise in Anlehnung an [8] zusammengefasst. Betrachtet wird dafür ein System mit n Freiheitsgraden, n_n Knoten und n_e Elementen. Da die Redundanzmatrix für Fachwerk- und Rahmentragwerke angewendet werden kann, wird die Anzahl der unabhängigen Lastabtragsmechanismen pro Element, n_m , eingeführt. Ebene und räumliche Fachwerkelemente besitzen einen Lastabtragsmechanismus. Balkenelemente besitzen drei Lastabtragsmechanismen für ebene bzw. sechs für räumliche Elemente. Die Anzahl der gesamten Lastabtragsmechanismen aller Elemente wird mit n_q bezeichnet. Des Weiteren werden die Gleichgewichtsmatrix $\mathbf{A}^T \in \mathbb{R}^{n \times n_q}$, die Materialmatrix $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n_q \times n_q}$, die Kompatibilitätsmatrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n_q \times n}$, sowie der Vektor der äußeren Lasten $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^n$ und der Vektor der Knotenverschiebungen $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$ definiert. Die drei Feldgleichungen der linearen Statik lauten somit:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{s} = \mathbf{f}, \quad \mathbf{s} = \mathbf{C} \mathbf{e}_{el}, \quad \mathbf{A} \mathbf{d} = \mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_{el}. \quad (1)$$

Die Vektoren $\mathbf{e}_0 \in \mathbb{R}^{n_q}$ und $\mathbf{e}_{el} \in \mathbb{R}^{n_q}$ bezeichnen die vorgegebenen Verformungen bzw. die elastischen Verformungen. Im Vektor $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^{n_q}$ werden die Spannungsergebnisse aller Elemente gesammelt. Die resultierenden Verschiebungen, welche sich aufgrund äußerer Lasten und vorgegebener Verformungen ergeben, können als

$$\mathbf{d} = \mathbf{K}^{-1}(\mathbf{f} + \mathbf{A}^T \mathbf{C} \mathbf{e}_0) \quad (2)$$

berechnet werden. Dabei ist die Matrix $\mathbf{K} = \mathbf{A}^T \mathbf{C} \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die elastische Steifigkeitsmatrix.

Basierend auf den Arbeiten von Bahndorf [1], Ströbel [9] und von Scheven [8] wird die Redundanzmatrix eingeführt. Sie stellt ein Maß für den verteilten Zwang innerhalb einer Struktur dar und ist unabhängig von äußeren Lasten. Die Redundanzmatrix ist definiert als

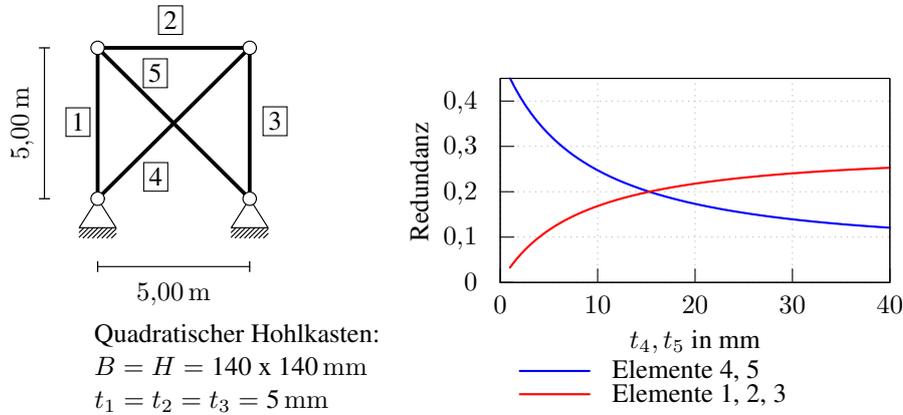


Abbildung 1: Abhängigkeit Querschnittsfläche und Redundanz. Links: Systembild mit Querschnittswerten; Rechts: Abhängigkeit der Redundanzen von der Wandstärke der Diagonalelemente.

Beziehung zwischen negativen elastischen Verformungen und vorgegebenen Verformungen:

$$-\mathbf{e}_{el} = (\mathbf{1} - \mathbf{A}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{C})\mathbf{e}_0 = \mathbf{R}\mathbf{e}_0. \quad (3)$$

Die Matrix $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{n_q \times n_q}$ ist idempotent und die Eigenwerte sind entweder 0 oder 1. Der Grad der statischen Unbestimmtheit kann als Summe der Hauptdiagonaleinträge der Redundanzmatrix gemäß [8] ermittelt werden:

$$\text{Spur}(\mathbf{R}) = n_q - n = n_s. \quad (4)$$

Die Hauptdiagonaleinträge der Redundanzmatrix können somit als verteilte statische Unbestimmtheit interpretiert und als Redundanzverteilung bezeichnet werden. Jeder Eintrag auf der Hauptdiagonalen ist positiv oder gleich null. Für Balkensysteme wird die verteilte statische Unbestimmtheit für jeden Lastabtragsmechanismus separat berechnet. Die statische Unbestimmtheit eines Elements kann dann als Summe der Beiträge der einzelnen Mechanismen berechnet werden. Für Fachwerksysteme bedeutet ein Hauptdiagonaleintrag der Redundanzmatrix von 0, dass es sich um ein statisch bestimmtes Element handelt. Es liegen keine Umlagerungsmöglichkeiten vor, das Element ist unverzichtbar für den Lastabtrag. Dagegen bedeutet ein Redundanzanteil von 1, dass sich dieses Fachwerkelement nicht am Lastabtrag beteiligt. Diese Interpretation lässt sich auf alle vorhandenen Lastabtragsmechanismen übertragen. Die verteilte statische Unbestimmtheit quantifiziert somit die Wichtigkeit der individuellen Elemente bzw. der Lastabtragsmechanismen innerhalb einer Struktur.

Wie aus der Definition der Redundanzmatrix in Gleichung (3) zu sehen, ist die Redundanzmatrix von den Elementesteifigkeiten, sowie der Form und Topologie des Tragwerks abhängig. Abb. 1 zeigt exemplarisch die Abhängigkeit der Redundanzverteilung von der Elementesteifigkeit. Die Wandstärke der Diagonalelemente variiert, die Wandstärke der restlichen Elemente ist konstant. Im Diagramm ist zu sehen, dass die Diagonalelemente mit zunehmender Wandstärke, d. h. größerer Elementesteifigkeit, weniger redundant und damit wichtiger für

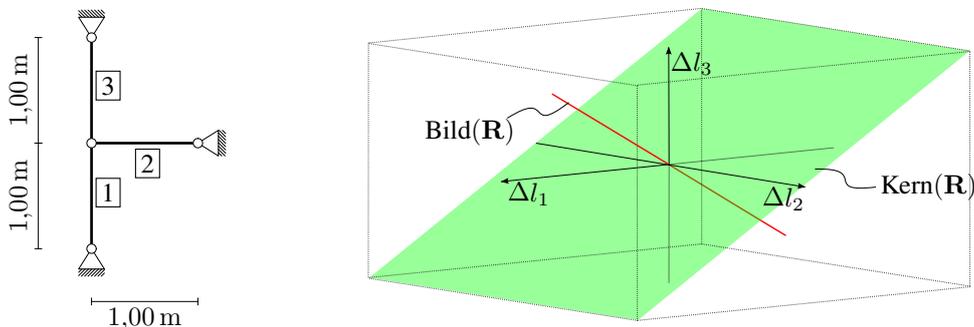


Abbildung 2: Vektorräume der Redundanzmatrix. Links: Systembild der Fachwerkstruktur. Rechts: Vektorräume des Bildes von \mathbf{R} (rot) und des Kerns von \mathbf{R} (grün).

den Lastabtrag werden. Da sich der Grad der statischen Unbestimmtheit des Systems durch die Querschnittsänderungen nicht ändert, vergrößert sich gleichzeitig die Redundanz der Elemente 1, 2 und 3.

Eine weitere nutzbare Eigenschaft der Redundanzmatrix ergibt sich in Bezug auf die Eigenvektoren. Das Bild der transponierten Redundanzmatrix wird durch die Eigenvektoren aufgespannt, die zu den Eins-Eigenwerten gehören, und spannt somit den n_s -dimensionalen Raum auf, der zu den Eigenspannungszuständen gehört. Dabei handelt es sich um denselben Vektorraum, der von Pellegrino und Calladine [7] als Nullraum der Gleichgewichtsmatrix vorgestellt wird. Der Kern der Redundanzmatrix spannt hingegen den Vektorraum auf, in dem die kompatiblen Verschiebungen liegen, die keine Spannungsresultierenden hervorrufen. Abb. 2 zeigt ein einfaches Beispiel einer Fachwerkstruktur zur Visualisierung der beschriebenen Vektorräume. Das System ist einfach statisch unbestimmt, somit gibt es genau einen reinen Zwangszustand, der in Rot dargestellt ist. Das Bild der Redundanzmatrix ist hier also eindimensional. Der Kern der Redundanzmatrix ist in Grün dargestellt. Dieser zweidimensionale Untervektorraum stellt sich so dar, dass die Verformungen der Elemente 1 und 3 den gleichen Betrag mit unterschiedlichen Vorzeichen haben und unabhängig von der Verformung von Element 2 sind.

3 Tragwerksbeurteilung mit der Redundanzmatrix

3.1 Robustheit

Der Grad der statischen Unbestimmtheit und deren Verteilung innerhalb des Tragwerks kann für den Entwurf robuster Tragwerke verwendet werden. In der DIN EN 1991-1-7 [2] wird Robustheit als die Eigenschaft eines Tragwerks definiert, außergewöhnliche Einwirkungen so zu überstehen, dass der Schaden nicht unverhältnismäßig der Schadensursache gegenübersteht. Als außergewöhnliche Einwirkungen werden z. B. Explosion oder Anprall angeführt, was zum Ausfall eines Teils der Struktur führen kann. Die Verteilung der statischen Unbestimmtheit quantifiziert die Wichtigkeit einzelner Elemente und visualisiert alternative Lastabtragsmechanismen. Bereits in den Arbeiten von Bahndorf [1] und Ströbel [9] wird im Zusammenhang mit der Sicherheit von Tragwerken angesprochen, dass Redundanzen möglichst homogen im Tragwerk verteilt werden sollten. In [1] wird gezeigt, dass die geänderte

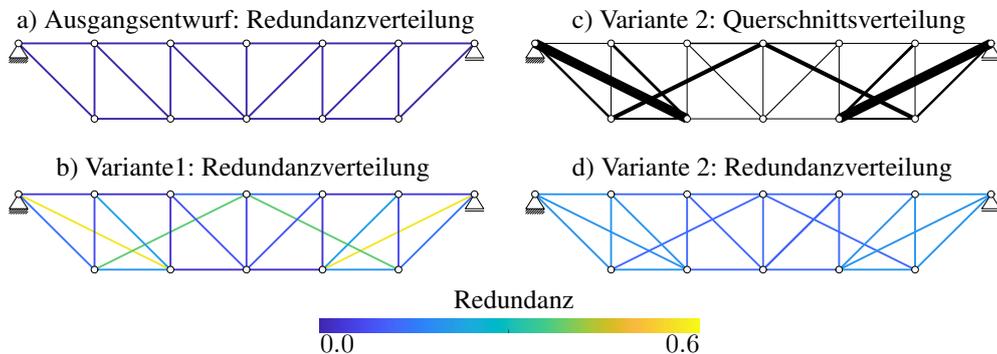


Abbildung 3: Redundanzverteilung des Ausgangsentwurfs (a). Redundanzverteilung Variante 1, Topologieänderung (b). Querschnittsverteilung Variante 2, dickere Linien repräsentieren größere Elementesteifigkeit (c). Redundanzverteilung Variante 2 (d).

Flexibilität der Struktur, die sich durch das Versagen eines Elements ergibt, lediglich vom Redundanzanteil ebendieses Elements abhängt. Eine homogene Verteilung der Redundanz führt also dazu, dass die geänderte Flexibilität unabhängig davon ist, welches Element versagt.

Abb. 3 zeigt beispielhaft ein Fachwerk, bei dem die Redundanzverteilung mit Topologie- und Querschnittsänderungen geändert wird. Der Ausgangsentwurf a) zeigt eine Fachwerkstruktur, die sowohl äußerlich als auch innerlich statisch bestimmt ist. Das Versagen eines jeden Elements führt zum Versagen des gesamten Tragwerks. Das Tragwerk besitzt keinerlei Redundanzen. In einem ersten Schritt wird der Grad der statischen Unbestimmtheit auf $n_s = 4$ erhöht. Dazu werden in b) vier zusätzliche Fachwerkelemente eingebaut. Die zusätzlichen Elemente führen dazu, dass kein statisch bestimmtes Tragwerksteil mehr vorhanden ist. Die Brauchbarkeit der Struktur ist also für den Fall, dass ein Element versagt, stets gegeben. Durch die zusätzlichen Elemente stellt sich allerdings eine Verteilung der statischen Unbestimmtheit ein, die innerhalb des Systems stark variiert. Um die Auswirkungen auf die Flexibilität der Struktur unabhängig vom jeweiligen Elementversagen zu machen, können die Elementesteifigkeiten angepasst werden. Eine alternative Querschnittsverteilung ist in c) dargestellt. Diese geänderte Querschnittsverteilung führt zu einer nahezu homogenen Verteilung der Redundanz, farblich in d) dargestellt. Durch diese zweistufige Änderung des Ausgangsentwurfs konnte ein im hier definierten Sinne robusteres Alternativtragwerk gefunden werden.

3.2 Assemblierbarkeit

Hinsichtlich der Assemblierbarkeit ist es Stand der Technik, Nachweise der Standsicherheit für verschiedene Stadien der Fertigstellung eines Tragwerks zu erstellen. Überlegungen wie beispielsweise eine optimale Bausequenz oder die Berücksichtigung von möglichen Herstellungsunperfektionen spielen dabei häufig eine untergeordnete Rolle. Anhand von Fachwerken wird im Folgenden gezeigt, welchen Einfluss Herstellungsungenauigkeiten auf die initiale Dehnungsverteilung haben. Dabei wird eine aus der Redundanzmatrix abgeleitete Dehnungsverteilung aufgrund von Imperfektionen verwendet. Unter der Annahme, dass die

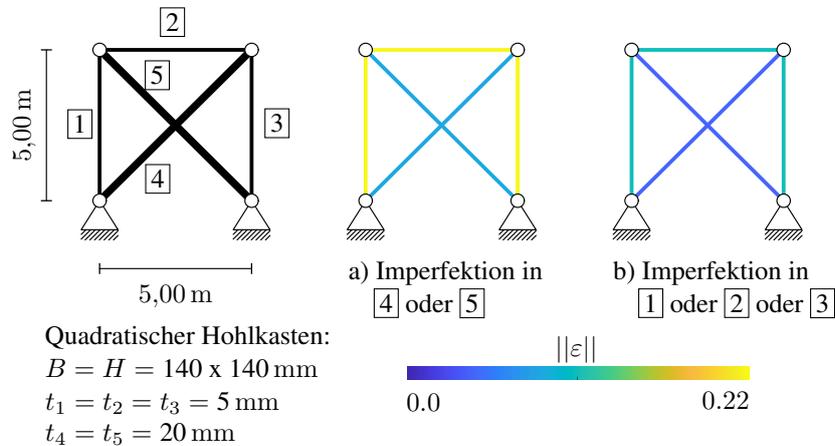


Abbildung 4: Assemblierbarkeit und Dehnungen durch imperfekte Elemente. Systembild mit Querschnittsdaten links. Dehnungsverteilung durch Imperfektionen unterschiedlicher Elemente a) und b) in Farbschema.

Dehnungen proportional zu den Spannungen sind, können so initiale Zwangsspannungen bestimmt und auch reduziert werden. Um Imperfektionen relativ zur Ursprungslänge der Elemente zu berücksichtigen, werden der Imperfektionsfaktor α und die Diagonalmatrix der Elementlängen $\mathbf{L} = \text{diag}(L_1, L_2, \dots, L_n)$ eingeführt. Die Redundanzmatrix für Fachwerke liefert spaltenweise negative elastische Längenänderungen aufgrund einer Einheitsverlängerung. Dadurch kann die Matrix $\boldsymbol{\varepsilon}$ mit Zeilen i und Spalten k berechnet werden, welche in der Zeile i jeweils die Dehnung eines Elements enthält, die durch eine Imperfektion im Element k hervorgerufen wird:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = -\alpha \mathbf{L}^{-1} \mathbf{R} \mathbf{L}. \quad (5)$$

Abb. 4 zeigt ein Beispielfachwerk, mit dem der Einfluss aus einer Imperfektion $\alpha = 0,05$ verdeutlicht werden soll. Das statische System besteht aus fünf Stäben, die Diagonalen besitzen dabei einen größeren Querschnitt. Die Redundanz der Diagonalen ist dadurch geringer als die Redundanz der Elemente 1, 2 und 3, siehe auch Abb. 1. Für die Beurteilung der initialen Zwangsspannungen muss jedoch nicht die Redundanz, sondern die daraus abgeleitete Dehnung betrachtet werden. In Abb. 4 a) ist der Dehnungszustand dargestellt, der sich ergibt, wenn eine der beiden Diagonalen mit einer Längenimperfektion von 5 % montiert wird. Der Dehnungszustand, der durch eine Längenimperfektion der Elemente 1, 2 oder 3 hervorgerufen wird, ist in b) zu sehen. Es ist zu erkennen, dass die initialen Dehnungen und damit auch Spannungen aus Zwang im zweiten Fall deutlich geringer ausfallen.

3.3 Adaptierbarkeit

Adaptive Tragwerke, wie sie im vorliegenden Artikel betrachtet werden sollen, zeichnen sich dadurch aus, dass sie sich an äußere Einflüsse wie beispielsweise Lasten oder Lagersetzungen anpassen können. Diese Anpassungen können durch den gezielten Einbau von Aktoren im Tragwerk ermöglicht werden. Dabei können prinzipiell sowohl Verschiebungs-, als auch

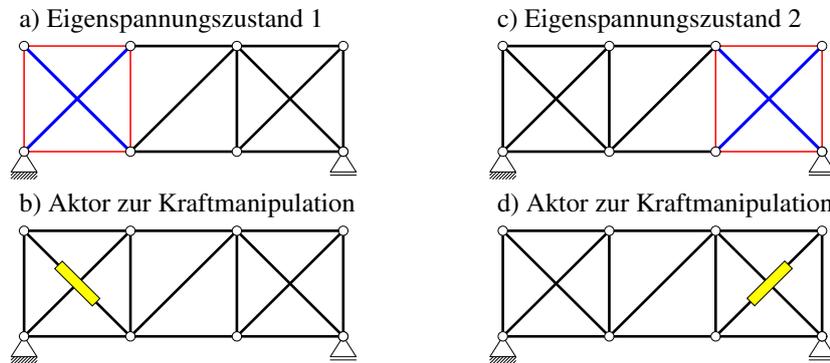


Abbildung 5: Beispiel eines adaptiven Tragwerks. Eigenspannungszustand und zugehöriger Aktor jeweils in a) und b) bzw. c) und d).

Kraftzustände manipuliert werden. Für die Manipulation von Kraftzuständen ist es erforderlich, dass die Struktur statisch unbestimmt ist und damit mindestens einen Eigenspannungszustand besitzt. Wie in Abschnitt 2 beschrieben, liefert die Redundanzmatrix Aussagen über Eigenspannungszustände und spannungsfreie Verformungszustände. Da ein Tragwerk genau n_s Eigenspannungszustände besitzt, benötigt man mindestens n_s Aktoren, um mit der Aktuierung den gesamten Bildraum der Redundanzmatrix aufzuspannen.

Zur Verdeutlichung der Kraftmanipulation in adaptiven Tragwerken ist in Abb. 5 ein Beispielfachwerk dargestellt. Das System ist zweifach statisch unbestimmt. Es müssen also zwei Aktoren eingebaut werden, um den Bildraum der Redundanzmatrix vollständig aufzuspannen. Die Besonderheit der Struktur liegt darin, dass die Eigenspannungszustände voneinander entkoppelt sind. Außerdem findet man in der Mitte des Systems eine statisch bestimmte Substruktur. Die Schnittkräfte innerhalb dieser Substruktur können durch Aktorik nicht beeinflusst werden. Die beiden Eigenspannungszustände in a) und c) sind farblich dargestellt, wobei rot und blau jeweils positive bzw. negative Normalkräfte repräsentieren. Die dafür gewählten Aktoren sind in b) und d) dargestellt. Die Platzierung der Aktoren ist nicht eindeutig. Der Eigenspannungszustand in a) kann auch durch einen Aktor im linken vertikalen Element hervorgerufen werden.

4 Zusammenfassung

Der Grad der statischen Unbestimmtheit als grundlegende Tragwerkeigenschaft lässt sich zur detaillierten Bewertung von statischen Systemen nutzen, wenn deren Verteilung innerhalb des Tragwerks betrachtet wird. Die Redundanzmatrix ermöglicht die Berechnung dieser räumlichen Verteilung. Zunächst wurden die Definition und wichtige Eigenschaften der Redundanzmatrix zusammengefasst und jeweils ein Beispiel zur Abhängigkeit von Steifigkeitsverteilungen und der Zusammenhang der Redundanzmatrix und deren Eigenräumen gezeigt. Die Verwendung der Redundanzmatrix bei der Bewertung von Strukturen zeigt in Bezug auf Robustheit, Assemblierbarkeit und Adaptierbarkeit breite Anwendungsmöglichkeiten. Diese Tragwerksbeurteilung kann bereits in frühen Entwurfsphasen genutzt werden, wodurch die Interaktion zwischen Architekten und Ingenieuren verbessert wird.

Danksagung

Die präsentierten Ergebnisse entstanden im Rahmen der Tätigkeiten im Exzellenzcluster IntCDC, gefördert durch die Deutsche Forschungsgemeinschaft (DFG) im Rahmen der Exzellenzstrategie des Bundes und der Länder – EXC 2120/1 – 390831618

Literatur

- [1] BAHNDORF, J. : *Zur Systematisierung der Seilnetzrechnung und zur Optimierung von Seilnetzen*. Stuttgart, Universität Stuttgart, Dissertation, 1991
- [2] DIN EN 1991-1-1-7:2010-12: Eurocode_1: Einwirkungen auf Tragwerke_- Teil_1-7: Allgemeine Einwirkungen_- Außergewöhnliche Einwirkungen; Deutsche Fassung EN_1991-1-7:2006_+ AC:2010 / Beuth Verlag GmbH. 2010. – Forschungsbericht
- [3] FORSTER, D. ; KANNENBERG, F. ; VON SCHEVEN, M. ; MENGES, A. ; BISCHOFF, M. : Design and Optimization of Beam and Truss Structures Using Alternative Performance Indicators Based on the Redundancy Matrix. Version: Sept. 2023. <http://dx.doi.org/10.1515/9783111162683-034>. In: DÖRFLER, K. (Hrsg.) ; KNIPPERS, J. (Hrsg.) ; MENGES, A. (Hrsg.) ; PARASCHO, S. (Hrsg.) ; POTTMANN, H. (Hrsg.) ; WORTMANN, T. (Hrsg.): *Advances in Architectural Geometry 2023*. De Gruyter, Sept. 2023. – DOI 10.1515/9783111162683-034, S. 455–466
- [4] GEIGER, F. ; BISCHOFF, M. : *Strukturmechanische Charakterisierung von Stabtragwerken für den Entwurf adaptiver Tragwerke*. Stuttgart, Bericht 74 / Institut für Baustatik und Baudynamik der Universität Stuttgart, Dissertation, 2022. <http://dx.doi.org/10.18419/OPUS-12299>. – DOI 10.18419/OPUS-12299
- [5] GEIGER, F. ; GADE, J. ; VON SCHEVEN, M. ; BISCHOFF, M. : Anwendung der Redundanzmatrix bei der Bewertung adaptiver Strukturen. In: OESTERLE, B. (Hrsg.) ; VON SCHEVEN, M. (Hrsg.) ; BISCHOFF, M. (Hrsg.): *Baustatik – Baupraxis 14*. Institut für Baustatik und Baudynamik, Universität Stuttgart, 2020. – ISBN 978-3-00-064639-3, S. 119 – 128
- [6] MAXWELL, J. C.: On the calculation of the equilibrium and stiffness of frames. In: *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 27 (1864), S. 294–299
- [7] PELLEGRINO, S. ; CALLADINE, C. : Matrix analysis of statically and kinematically indeterminate frameworks. In: *International Journal of Solids and Structures* 22 (1986), Nr. 4, S. 409–428. [http://dx.doi.org/10.1016/0020-7683\(86\)90014-4](http://dx.doi.org/10.1016/0020-7683(86)90014-4). – DOI 10.1016/0020-7683(86)90014-4
- [8] SCHEVEN, M. von ; RAMM, E. ; BISCHOFF, M. : Quantification of the redundancy distribution in truss and beam structures. In: *International Journal of Solids and Structures* 213 (2021), März, S. 41–49. <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2020.11.002>. – DOI 10.1016/j.ijsolstr.2020.11.002
- [9] STRÖBEL, D. : *Die Anwendung der Ausgleichsrechnung auf elastomechanische Systeme*. Stuttgart, Universität Stuttgart, Dissertation, 1995