

# Zeitveränderliche Zwangsbedingungen in der Baustatik: Herausforderungen, neue Methodik und Anwendungen

Jonas Boungard, Jens Wackerfuß

*Institut für Baustatik und Baudynamik, Universität Kassel*

**Zusammenfassung:** Die Modellierung von Aktoren unter großen Verschiebungen und Rotationen stellt eine Herausforderung für die numerische Simulation adaptiver Tragwerke dar. In diesem Beitrag wird daher ihre Modellierung mithilfe nichtlinearer Zwangsbedingungen untersucht. Existierende Methoden zur Einarbeitung der Zwangsbedingungen werden vorgestellt und mit einer neuartigen Methode verglichen. Der Einsatz der nichtlinearen Zwangsbedingungen wird am Beispiel der aufrollbaren Fußgängerbrücke *Rolling Bridge* in London veranschaulicht und auf Basis der neuen Methode die notwendigen Aktorenkräfte für verschiedene Bewegungsstrategien analysiert.

## 1 Einleitung

Adaptive Tragwerke sind in der Lage, die mechanischen Eigenschaften des Tragwerks während der Nutzung zu steuern. Häufig wird die Adaptivität mithilfe von Aktoren in Form von Hubzylindern realisiert, die eine Längenänderung zwischen zwei Punkten und damit eine Änderung der Geometrie des Tragwerks bewirken. Im Rechenmodell des Tragwerks muss die Steuerung dieser Längenänderung berücksichtigt werden. Eine besondere Herausforderung stellen dabei adaptive Tragwerke dar, bei denen die Aktoren großen Verschiebungen und Rotationen unterliegen. Dies tritt bei beweglichen Tragwerken auf, bei denen die Adaptivität das Ziel verfolgt, zwischen verschiedenen Konfigurationen des Tragwerks zu wechseln, z. B. bei Faltbrücken oder faltbaren Dächern. Eine bisher nicht in der Literatur berücksichtigte Methode ist die Modellierung der Aktoren mithilfe nichtlinearer Zwangsbedingungen. Diese Methodik wird in Abschnitt 2 erläutert und in Abschnitt 3 an einem konkreten Tragwerk eingesetzt.

## 2 Methodik

### 2.1 Nichtlineare Zwangsbedingungen

Nichtlineare Zwangsbedingungen beschreiben nichtlineare Beziehungen zwischen den Freiheitsgraden eines Tragwerks, z. B. den Verschiebungen zweier Punkte  $i$  und  $k$ . Dabei handelt es sich in der Regel um geometrische Bedingungen an die Deformation eines Tragwerks. Im Falle eines Hubzylinders wird der Abstand  $\Delta\ell_{ik}$  zwischen dem Anfangsknoten  $i$  und dem Endknoten  $k$  des Aktors in Abhängigkeit eines Steuerparameters  $\tau$  festgeschrieben. Für den Fall, dass der Aktor große Rotationen erfährt, muss die Zwangsbedingung nichtlinear formuliert werden. Die entsprechende nichtlineare Zwangsbedingung lautet

$$c(\tau) = \Delta\ell_{ik}(\tau) = L_{ik} - \ell_{ik} = \|\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_k\| - \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k\| = \alpha(\tau) \quad (1)$$

mit der Länge  $L$  und dem Ortsvektor  $\mathbf{X}$  in der Referenzkonfiguration und der Länge  $\ell$  dem Ortsvektor  $\mathbf{X}$  in der Momentankonfiguration sowie dem vorgegebenen Aktorenweg  $\alpha$ .

Alternativ lassen sich Aktoren mithilfe spezieller Elementformulierungen sowohl für geometrisch lineare Probleme, siehe [4], als auch geometrisch nichtlineare Probleme, siehe [5], modellieren. Dies erfordert die Einführung zusätzlicher Freiheitsgrade.

Darüber hinaus erlauben nichtlineare Zwangsbedingungen die Modellierung einer Reihe weiterer Eigenschaften von Tragwerken. Beispiele hierfür sind die Kopplung von Balken-, Schalen- und Volumenelementen mit- und untereinander, Gelenke im Kontext großer Deformationen sowie die Berücksichtigung von starren Tragwerksbereichen.

### 2.2 Einarbeitung von nichtlinearen Zwangsbedingungen in der FEM

Die nichtlinearen Zwangsbedingungen müssen in der numerischen Analyse des Tragwerks berücksichtigt werden. Im Folgenden wird daher die Einarbeitung der Zwangsbedingungen in der Finiten-Elemente-Methode vorgestellt. Ausgangspunkt dabei ist die diskretisierte schwache Form  $W$ , die von den Knotenfreiheitsgraden  $\mathbf{V}$  des FE-Netzes abhängt. Diese Freiheitsgrade werden durch das *Optimierungsproblem*  $\min W(\mathbf{V})$  bestimmt. Sind zusätzlich die  $n_c$  vielen Zwangsbedingungen  $\mathbf{c}(\mathbf{V})$  zu berücksichtigen, ergibt sich hingegen ein *Optimierungsproblem mit Nebenbedingungen*:

$$\min_{\mathbf{V}} W(\mathbf{V}) \quad \text{s.t. } \mathbf{c}(\mathbf{V}) = \mathbf{0} \quad (2)$$

Zur Lösung des Problems (2) existieren in der Literatur mehrere Verfahren, die im Folgenden kurz zusammengefasst werden. Eine ausgezeichnete Übersicht über die Verfahren findet sich außerdem im Buch von Belytschko et al. [1]. Alle Verfahren überführen das *Optimierungsproblem mit Nebenbedingungen* in ein *modifiziertes Optimierungsproblem ohne Nebenbedingungen*. Dies resultiert in einem nichtlinearen Gleichungssystem, das in der Regel mithilfe des Newton-Raphson-Verfahrens gelöst wird, wobei dabei immer die folgenden Größen benötigt werden

$$\mathbf{R}(\mathbf{V}) := \frac{\partial W(\mathbf{V})}{\partial \mathbf{V}}; \quad \mathbf{K}_T(\mathbf{V}) := \frac{\partial \mathbf{R}(\mathbf{V})}{\partial \mathbf{V}}; \quad \mathbf{G} := \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial \mathbf{V}}; \quad \mathbf{H}_i := \frac{\partial^2 c_i}{\partial \mathbf{V}^2} \quad (3)$$

mit dem Residuumsvektor  $\mathbf{R}$ , der tangentialen Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_T$ , der Jacobi-Matrix der Zwangsbedingungen  $\mathbf{G}$  und der Hesse-Matrix der jeweiligen Zwangsbedingungen  $\mathbf{H}_i$ .

Innerhalb aller präsentierter Verfahren lassen sich die Zwangskräfte  $\mathbf{C}$  berechnen. Im Falle der Modellierung des Aktors mithilfe der Zwangsbedingung (1) lassen sich die Hubkräfte jedes Zylinders als die dazugehörigen Zwangskräfte identifizieren.

Das einfachste Verfahren ist die Penalty-Methode (PM), bei der die Zwangsbedingungen näherungsweise erfüllt werden. Dafür wird der Penaltyfaktor  $\beta$  eingeführt. Das Verfahren führt auf das folgende effektive Gleichungssystem zur Ermittlung der Inkremente  $\Delta \mathbf{V}$ :

$$(\mathbf{K}_T + \beta (\mathbf{G}^T \mathbf{G} + c_i \mathbf{H}_i)) \Delta \mathbf{V} = -\mathbf{R} \underbrace{-\beta \mathbf{c}^T \mathbf{G}}_{=: \mathbf{C}_{PM}} \quad (4)$$

Die Methode weist zwei bekannte Nachteile auf: Die Zwangsbedingungen werden nicht exakt erfüllt, wobei der Fehler bei kleinen Penaltyfaktoren besonders groß ist, und bei großen Penaltyfaktoren klein. Letztere führen jedoch zu einer schlecht konditionierten Matrix.

Ein in der mathematischen Optimierung weit verbreitetes und in vielen kommerziellen FE-Codes implementiertes Verfahren ist die Methode der Lagrange-Multiplikatoren (LM). In der Methode werden  $n_c$  viele Lagrange-Multiplikatoren  $\lambda$  als zusätzliche Freiheitsgrade eingeführt. Die Methode erfüllt die Zwangsbedingungen exakt. Das Verfahren führt auf das folgende effektive Gleichungssystem zur Ermittlung der Inkremente  $\Delta \mathbf{V}$ :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_T + \lambda_i \mathbf{H}_i & \mathbf{G}^T \\ \mathbf{G} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{V} \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{R} \\ \underbrace{-\lambda^T \mathbf{G}}_{=: \mathbf{C}_{LM}} \\ -\mathbf{c} \end{bmatrix} \quad (5)$$

Neben diesen beiden oben genannten fundamentalen Verfahren (PM und LM) existieren zwei Mischformen dieser Verfahren. Das erste Verfahren ist die Methode der Augmented-Lagrange-Multiplikatoren (ALM), bei der die Methode der Lagrange-Multiplikatoren mithilfe des Penaltyfaktors  $\beta$  relaxiert wird. Das Verfahren führt auf das folgende effektive Gleichungssystem zur Ermittlung der Inkremente  $\Delta \mathbf{V}$ :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_T + \lambda_i \mathbf{H}_i + \beta (\mathbf{G}^T \mathbf{G} + c_i \mathbf{H}_i) & \mathbf{G}^T \\ \mathbf{G} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{V} \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{R} \\ \underbrace{-\lambda^T \mathbf{G} - \beta \mathbf{c}^T \mathbf{G}}_{=: \mathbf{C}_{ALM}} \\ -\mathbf{c} \end{bmatrix} \quad (6)$$

Die Methode der Augmented-Lagrange-Multiplikatoren weist die gleichen Vor- und Nachteile auf wie die Methode der Lagrange-Multiplikatoren. Sie verbessert jedoch die Konditionierung der effektiven Matrix, wenn ein geeigneter Penaltyfaktor gewählt wird [1].

Das zweite Verfahren ist die Methode der Perturbed-Lagrange-Multiplikatoren (PLM), bei dem die Methode der Lagrange-Multiplikatoren mithilfe des Perturbation-Faktors  $\epsilon$  regulariert wird. Das Verfahren führt auf das folgende effektive Gleichungssystem zur Ermittlung der Inkremente  $\Delta \mathbf{V}$ :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_T + \lambda_i \mathbf{H}_i & \mathbf{G}^T \\ \mathbf{G} & -\epsilon \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{V} \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{R} \\ \underbrace{-\lambda^T \mathbf{G}}_{=: \mathbf{C}_{PLM}} \\ -\mathbf{c} + \epsilon \lambda \end{bmatrix} \quad (7)$$

Dieses Verfahren kann in das Penalty-Verfahren überführt werden [1] und besitzt demzufolge die gleichen Vor- und Nachteile.

Neben den zuvor genannten Verfahren haben die Autoren eine neue Methode zur Einarbeitung nichtlinearer Zwangsbedingungen in Form einer Erweiterung der Master-Slave-Elimination (MS elim.) entwickelt, die ausführlich in [2] vorgestellt wird. Bei diesem Verfahren werden  $n_c$  viele Slave-Freiheitsgrade  $\mathbf{V}_s$  aus dem System eliminiert, sodass lediglich die Master-Freiheitsgrade  $\mathbf{V}_m$  an einem reduzierten Gleichungssystem ermittelt werden müssen. Dies führt auf den folgenden Gleichungssatz zur Ermittlung der Inkremente  $\Delta \mathbf{V}$ :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_{\text{red}} \Delta \mathbf{V}_m &= -\mathbf{R}_{\text{red}} \\
 \mathbf{K}_{\text{red}} &= \mathbf{K}_{\text{mod},mm} - \mathbf{K}_{\text{mod},ms} \mathbf{G}_s^{-1} \mathbf{G}_m \\
 \mathbf{R}_{\text{red}} &= \mathbf{R}_{\text{mod},m} - \mathbf{K}_{\text{mod},ms} \mathbf{G}_s^{-1} \mathbf{c} \\
 \mathbf{K}_{\text{mod},m\beta} &= \mathbf{K}_{m\beta} - \sum_{i=1}^{n_c} (\mathbf{H}_{m\beta,i} Y_i) + \mathbf{G}_m^T \mathbf{G}_s^{-T} \sum_{i=1}^{n_c} (\mathbf{H}_{s\beta,i} Y_i) - \mathbf{G}_m^T \mathbf{G}_s^{-T} \mathbf{K}_{s\beta} \\
 \mathbf{Y} &= \mathbf{G}_s^{-T} \mathbf{R}_s \\
 \mathbf{R}_{\text{mod},m} &= \mathbf{R}_m - \mathbf{G}_m^T \mathbf{G}_s^{-T} \mathbf{R}_s \\
 \mathbf{G}_m &= \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial \mathbf{V}_m} \\
 \mathbf{G}_s &= \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial \mathbf{V}_s} \\
 \mathbf{C}_{\text{MS elim.}} &= \mathbf{G}^T \mathbf{G}_s^{-T} \mathbf{R}_s
 \end{aligned} \tag{8}$$

Das neue Master-Slave-Eliminierungsverfahren für nichtlineare Zwangsbedingungen erfüllt die Zwangsbedingungen exakt und reduziert die Dimension des resultierenden Gleichungssystems um die Anzahl der Zwangsbedingungen  $n_c$ , siehe Gleichung (8)<sub>1</sub>. Wie in [2] gezeigt wurde, weist dieses Verfahren eine geringere Berechnungskomplexität auf als die zuvor vorgestellten Verfahren. Die Master-Elimination erfordert die Auswahl eines geeigneten Satzes von Slave-Freiheitsgraden, welche jedoch ohne zusätzlichen Berechnungsaufwand identifiziert werden können [3].

### 2.3 Steuerung zeitlich veränderlicher nichtlinearer Zwangsbedingungen

Zeitlich veränderliche Zwangsbedingungen sind Gleichungen, die nicht nur von den Knotenfreiheitsgraden des FE-Netzes abhängen, sondern zusätzlich von einem Steuerparameter  $\tau$ . Dieser Fall wurde bislang in der Literatur zu nichtlinearen Zwangsbedingungen in der FEM nicht betrachtet. In diesem Beitrag soll daher das Potential dieser Art von Zwangsbedingungen zur Modellierung komplexer Ingenieuraufgaben dargelegt werden. Ein Anwendungsbeispiel ist die oben aufgeführte Modellierung des Aktors in Gleichung (1). In diesem Beitrag betrachten wir ausschließlich den quasi-statischen Fall, d. h. Trägheitskräfte werden vernachlässigt.

### 3 Anwendung – Rolling Bridge

#### 3.1 Beschreibung und Modellierung

Die *Rolling Bridge* ist eine aufrollbare Fußgängerbrücke in London mit einer Spannweite von 12 m, einer Breite von 1,6 m und einer Geländerhöhe von 1,18 m. Sie wurde vom britischen Architekten Thomas Heatherwick entworfen. Die Brücke besteht aus 8 trapezförmigen Segmenten, die auf jeder Seite durch 4 biegesteif verbundene Stahlträger ausgebildet werden. Der Gehweg besteht aus Holzbohlen. Insgesamt wiegt die Brücke 4,5 t. Sie kann über  $2 \times 7$  Hubzylinder binnen 180 Sekunden ein- oder ausgerollt werden. Aufgrund der geringen Geschwindigkeiten ist die Annahme der Vernachlässigung der Trägheitskräfte in Abschnitt 2.3 gerechtfertigt. In Abbildung 1 ist die Brücke während des Aufrollvorgangs zu sehen.

Für die numerische Simulation wurde unter Ausnutzung der Symmetrie die Brücke wie folgt modelliert: Die Trapezsegmente wurden mit geometrisch exakten, linear elastischen Timoshenko-Balkenelementen modelliert. Die Verbindungen am Kopf der Segmente erfolgte über zwei geometrisch exakte, linear elastische Fachwerkelemente. Die Hubzylinder wurden mithilfe der nichtlinearen Zwangsbedingung (1) modelliert. Dafür wurde der Steuerparameter  $\tau$  eingeführt, mit dem die Größe des Aktorenwegs  $\alpha$  kontrolliert wird.

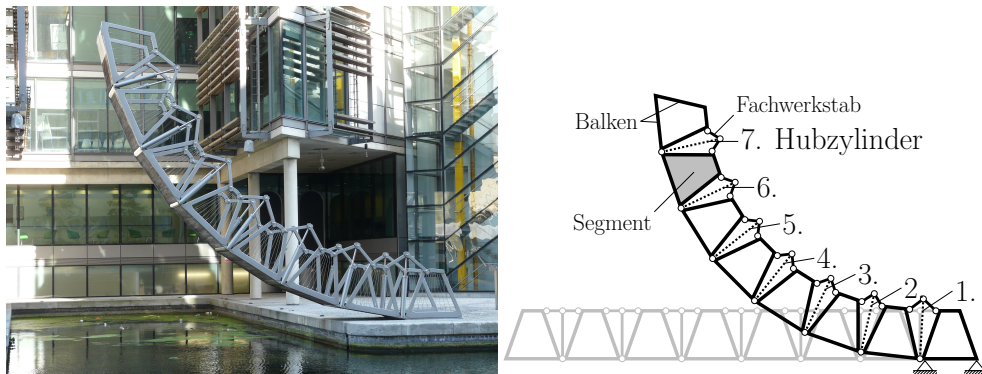


Abbildung 1: Reale Tragstruktur<sup>1</sup>(links) und statisches Ersatzmodell (rechts)

Während des Aufrollens wird das Tragwerk ausschließlich durch das Eigengewicht und die Hubkräfte belastet. Man erkennt, dass die Hubkräfte der Zylinder statisch bestimmte Größen sind. Somit lösen die Längenänderungen der Aktoren keine Zwängungen im Tragwerk aus. Damit lassen sich die Hubkräfte für jeden Schritt des Aufrollens sehr einfach allein mit Gleichgewichtsbetrachtungen berechnen. Für die Überprüfung einzelner Hubkräfte während des Aufrollens wird hier das Prinzip der virtuellen Verrückungen verwendet.

Es wird darauf hingewiesen, dass alle Methoden zur Einarbeitung der Zwangsbedingungen aus Abschnitt 2.2 zum gleichen Ergebnis führen.

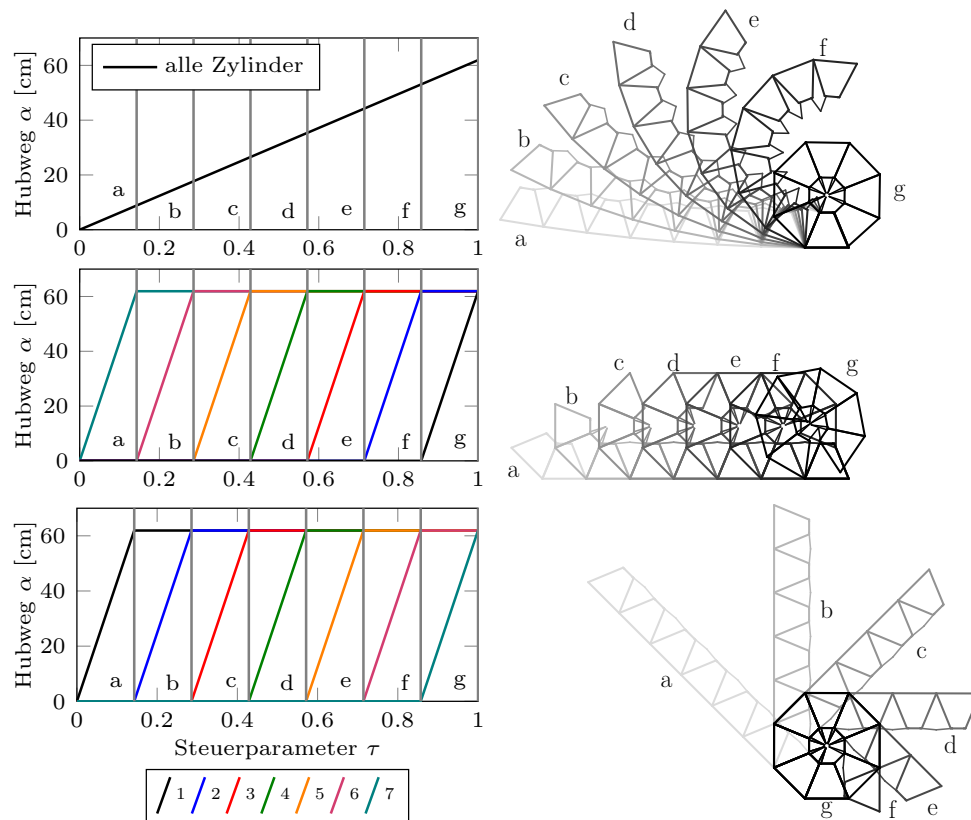
<sup>1</sup>Fotograf: Loz Pycock. Lizenz: CC BY-SA 2.0 Deed (<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/2.0/deed.en>)

### 3.2 Simulationsergebnisse

Für die Simulation des Aufrollens wurden drei Aktuationsstrategien miteinander verglichen:

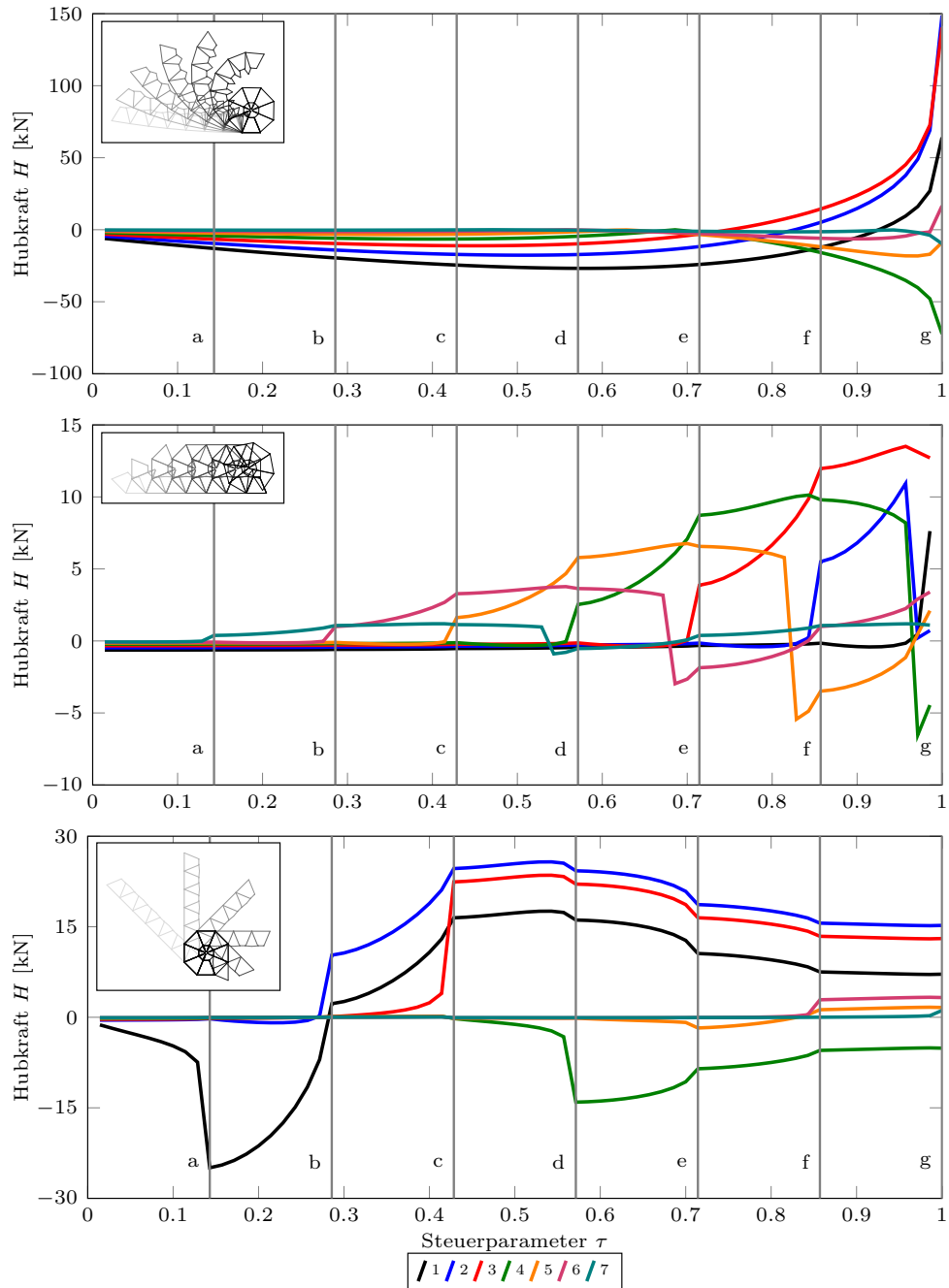
1. Simultanes Ausfahren aller Zylinder
2. Sukzessives vollständiges Ausfahren jedes einzelnen Zylinders beginnend bei Nr. 7
3. Sukzessives vollständiges Ausfahren jedes einzelnen Zylinders beginnend bei Nr. 1

Die Aktorenwege werden so gesteuert, dass in allen Fällen die gewünschte Endposition der Brücke erreicht wird. Zur Visualisierung der unterschiedlichen Strategien sind in Abbildung 2 auf der linken Seite die Hubwege  $\alpha(\tau)$  jedes der 7 Zylinder in Abhängigkeit des Steuerparameters  $\tau$  dargestellt. In Abbildung 2 sind auf der rechten Seiten insgesamt 7 ausgewählte Konfigurationen a–g der Brücke dargestellt. Es wird darauf hingewiesen, dass die Strategien 2 und 3 zu einem Durchdringen der Brücke mit sich selbst beziehungsweise dem Baugrund führen und daher aus baupraktischer Sicht unbrauchbar sind.



**Abbildung 2:** 3 unterschiedliche Aktuationsstrategien und zugehörige Konfigurationen

Für jede der drei Aktuationsstrategien wurden die Hubkräfte  $H$  jedes einzelnen Zylinders in Abhängigkeit des Steuerparameters  $\tau$  bestimmt und in Abbildung 3 dargestellt.



**Abbildung 3:** Verlauf der Hubkraft über den Steuerparameter für unterschiedliche Aktuationsstrategien

### 3.3 Interpretation und Diskussion

Auf Basis der Simulationsergebnisse können folgende Schlussfolgerungen gezogen werden: Die großen Starrkörperbewegungen dominieren die Verschiebung des Tragwerks und die elastischen Deformationen sind ihnen gegenüber verschwindend gering. Man erkennt, dass die Größe und der Verlauf der einzelnen Hubkräfte sehr stark von der jeweils gewählten Aktuationsstrategie abhängig sind. Zusätzlich erkennt man die starke Abhängigkeit der Hubkräfte vom Steuerparameter  $\tau$  und somit dem Fortschritt des Aufrollprozesses. Während sich die Hubkräfte in der Strategie 1 kontinuierlich verändern, kommt es in den Strategien 2 und 3 zu starken plötzlichen Änderungen.

Bei der Auswahl der Aktuationsstrategie muss sowohl auf die baupraktische Realisierbarkeit, als auch auf die Effizienz geachtet werden. Die Identifikation der effizientesten Aktuationsstrategie war nicht Gegenstand der vorliegenden Untersuchung, eine entsprechende Methode findet sich aber unter anderem in [5].

Anhand des Beispiels konnte gezeigt werden, dass zeitlich veränderliche Zwangsbedingungen, die mithilfe eines Steuerparameters gesteuert werden, geeignet sind, um Aktoren von adaptiven Tragwerken zu modellieren. Aufgrund ihrer Flexibilität eignen sie sich für die Modellierung verschiedener Aktorentypen. Die nichtlinearen Zwangsbedingungen können mit verschiedenen Methoden in der FEM berücksichtigt werden, siehe Abschnitt 2.2, unter anderem der neuartigen Erweiterung der Master-Slave-Elimination auf nichtlineare Probleme [2]. Bei der Modellierung mittels nichtlinearer Zwangsbedingungen können ebenfalls die Aktorenkräfte berechnet werden, die zur Auslegung eines adaptiven Tragwerks wie der *Rolling Bridge* benötigt werden, da alle in Abschnitt 2.2 vorgestellten Methoden die Berechnung der Zwangskräfte ermöglichen. Bei der Anwendung dieser Methoden sind gewisse Aspekte zu beachten, darunter die Redundanz von Zwangsbedingungen. Entsprechende Forschungsergebnisse werden von den Autoren aktuell zu einer Publikation zusammengetragen [3].

## Literatur

- [1] BELYTSCHKO, T. ; LIU, W. ; MORAN, B. ; ELKHODARY, K. : *Nonlinear finite elements for continua and structures*. 2. Auflage. Wiley, 2014
- [2] BOUNGARD, J. ; WACKERFUSS, J. : Master-slave elimination scheme for arbitrary non-linear multi-point constraints. In: *Computational Mechanics* (In Begutachtung)
- [3] BOUNGARD, J. ; WACKERFUSS, J. : *Identification, elimination and handling of redundant non-linear multi-point constraints*. Publikation in Vorbereitung
- [4] GEIGER, F. ; GADE, J. ; VON SCHEVEN, M. ; BISCHOFF, M. : Optimal Design of Adaptive Structures vs. Optimal Adaption of Structural Design. In: *IFAC-PapersOnLine* 53 (2020), Nr. 2, S. 8363–8369. – 21st IFAC World Congress
- [5] SACHSE, R. : *Variational Motion Design for Adaptive Structures*, Institut für Baustatik und Baudynamik der Universität Stuttgart, Diss., 2020