

# Hierarchische Formulierungen für statische und dynamische Analysen von Flächentragwerken

Bastian Oesterle<sup>1</sup>, Rebecca Thierer<sup>2</sup>, Lisa-Marie Krauß<sup>2</sup>, Manfred Bischoff<sup>2</sup>

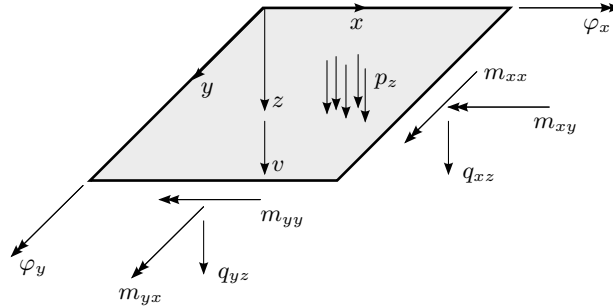
<sup>1</sup>Institut für Baustatik, Technische Universität Hamburg

<sup>2</sup>Institut für Baustatik und Baudynamik, Universität Stuttgart

**Zusammenfassung:** Hierarchische Balken-, Platten- und Schalenformulierungen basieren auf einer geschickten Reparametrisierung der kinematischen Gleichungen, die sich für neuartige, glatte Diskretisierungsverfahren als vorteilhaft erweist. Im vorliegenden Beitrag werden die intrinsischen Eigenschaften des hierarchischen Konzepts anhand statischer und dynamischer Analysen von Flächentragwerken aufgezeigt und diskutiert.

## 1 Einleitung

Strukturmechanische Modelle, wie beispielsweise Balken-, Platten- und Schalenmodelle, sind für das Verständnis des Tragverhaltens unerlässlich. Speziell für Flächentragwerke kann in allgemeinen Fällen aber nicht auf analytische Lösungen zurückgegriffen werden, was genaue und effiziente numerische Lösungsverfahren erfordert. Die Finite-Elemente-Methode (FEM) ist das wohl bekannteste und am häufigsten verwendete Lösungsverfahren. In den letzten Jahrzehnten haben sich einige glatte Diskretisierungsverfahren in vielen Forschungszweigen der computerorientierten Strukturmechanik etabliert und halten zum Teil auch Einzug in kommerzielle FE-Software. Als Beispiel seien isogeometrische Diskretisierungsverfahren genannt. Mit der isogeometrischen Analyse (IGA) wird in [5] ein Konzept vorgeschlagen, das an der Schnittstelle von computergestütztem Entwurf (CAD) und computergestützter Berechnung, z. B. durch die FEM, angreift. Die grundlegende Idee ist die Verwendung einer CAD-Basis, üblicherweise nicht-uniforme rationale B-Splines (NURBS), für die Parametrisierung des Geometrie- und des Berechnungsmodells. NURBS erlauben eine relativ einfache Konstruktion von glatten, mindestens  $C^1$ -kontinuierlichen Ansatzräumen. Mitunter führte diese Eigenschaft zu einer regelrechten Renaissance schubstarrer strukturmechanischer Modelle, da deren Anforderungen an die Ansatzräume mit isogeometrischen finiten Elementen deutlich einfacher zu bewerkstelligen sind als mit gewöhnlichen finiten Elementen. Die erste Diskretisierung des klassischen Kirchhoff-Love-Schalenmodells unter Verwendung von NURBS wird in [6] vorgestellt.



**Abbildung 1:** Definition der Verschiebungs- und Schnittgrößen einer Platte.

Isogeometrische schubweiche Reissner-Mindlin-Schalenelemente werden unter anderem in [2] und [3] vorgeschlagen. Die in [4, 9, 8, 11] vorgestellten hierarchischen schubweichen Reissner-Mindlin-Schalenformulierungen sind durch eine geschickte Reparametrisierung der kinematischen Variablen in der Lage, Querschublocking *intrinsisch*, d. h. unabhängig vom Diskretisierungsverfahren, zu vermeiden. Zudem stehen bei hierarchischen Formulierungen Schubvariablen, wie beispielsweise Schubrotationen, direkt zur Verfügung, was auch für dynamische Problemstellungen vorteilhaft sein kann. Für transiente Analysen kann im Kontext expliziter Zeitintegrationsverfahren eine effizienzsteigernde intrinsisch selektive Massenskalierung (ISMS) entwickelt werden, siehe [10] für Balken und [7] für Platten. Im Sinne der Übersichtlichkeit wird der vorliegende Beitrag die intrinsischen Eigenschaften hierarchischer Formulierungen für statische und explizite dynamische Probleme exemplarisch anhand schubweicher Plattenformulierungen beleuchten.

## 2 Schubweiche Plattenformulierungen

In diesem Kapitel werden zunächst die Grundlagen des schubweichen Plattenmodells nach Mindlin eingeführt, bevor schubweiche Plattenformulierungen mit unterschiedlicher Parametrisierung der kinematischen Gleichungen vorgestellt werden. In Abb. 1 wird die Vorzeichenkonvention der Verschiebungs- und Schnittgrößen einer Platte definiert. Dabei stellen  $v$ ,  $\varphi_x$  und  $\varphi_y$  die drei Verschiebungsgrößen der Platte dar. Für isotrope Platten lässt sich die Anzahl an unabhängigen Kraftgrößen durch die Bedingung  $m_{xy} = m_{yx}$  auf fünf reduzieren. Dabei stellen  $q_{xy}$  und  $q_{xz}$  Querkräfte,  $m_{xx}$  und  $m_{yy}$  Biegemomente und  $m_{xy}$  das Drillmoment dar. Diese statischen Größen stehen mit den äußeren Lasten  $p_z$  im Gleichgewicht.

Über die Werkstoffgleichungen lassen sich die statischen Größen aus Abb. 1 mit den kinematischen Größen aus Tab. 1 in Verbindung setzen. Unter Annahme eines linear elastischen

Formulierung (Parameter)	Rotationen	Schubwinkel	Krümmungen und Verwindung
<b>M-st</b> ( $v, \varphi_x, \varphi_y$ )	$\varphi_x = \varphi_x$ $\varphi_y = \varphi_y$	$\gamma_{xz} = v_{,x} + \varphi_y$ $\gamma_{yz} = v_{,y} - \varphi_x$	$\kappa_{xx} = \varphi_{y,x}$ $\kappa_{yy} = -\varphi_{x,y}$ $\kappa_{xy} = \frac{1}{2}(\varphi_{y,y} - \varphi_{x,x})$
<b>M-hr</b> ( $v, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ )	$\varphi_x = v_{,y} - \gamma_{yz}$ $\varphi_y = -v_{,x} + \gamma_{xz}$	$\gamma_{xz} = \gamma_{xz}$ $\gamma_{yz} = \gamma_{yz}$	$\kappa_{xz} = -v_{,xx} + \gamma_{xz,x}$ $\kappa_{yz} = -v_{,yy} + \gamma_{yz,y}$ $\kappa_{xy} = -v_{,xy}$ $+ \frac{1}{2}(\gamma_{xz,y} + \gamma_{yz,x})$
<b>M-hd</b> ( $v, v_{s_x}, v_{s_y}$ )	$\varphi_x = v_{,y} - v_{s_y,y}$ $\varphi_y = -v_{,x} + v_{s_x,x}$	$\gamma_{xz} = v_{s_x,x}$ $\gamma_{yz} = v_{s_y,y}$	$\kappa_{xz} = -v_{,xx} + v_{s_x,xx}$ $\kappa_{yz} = -v_{,yy} + v_{s_y,yy}$ $\kappa_{xy} = -v_{,xy}$ $+ \frac{1}{2}(v_{s_x,xy} + v_{s_y,xy})$

**Tabelle 1:** Kinematik der gewöhnlichen Mindlin-Plattenformulierung M-st und der hierarchischen Mindlin-Plattenformulierungen M-hr und M-hd.

Materialverhaltens gilt

$$\begin{aligned}
m_{xx} &= K(\kappa_{xx} + \nu\kappa_{yy}), \\
m_{yy} &= K(\kappa_{yy} + \nu\kappa_{xx}), \\
m_{xy} &= K(1 - \nu)\kappa_{xy}, \\
q_{xy} &= Gd\gamma_{xy}, \\
q_{xz} &= Gd\gamma_{xz},
\end{aligned} \tag{1}$$

wobei  $K = \frac{Ed^3}{12(1-\nu^2)}$  die Plattenbiegesteifigkeit,  $d$  die Plattendicke,  $E$  den Elastizitätsmodul,  $\nu$  die Querdehnzahl und  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$  den Schubmodul beschreiben.

Je nach Plattenformulierung wird die Kinematik mit unterschiedlichen primären Verschiebungsgrößen parametrisiert. Eine kompakte Zusammenstellung der Kinematik der hier beschriebenen Plattenformulierungen ist in Tab. 1 zusammengefasst. Im hier vorliegenden Beitrag muss auf eine detaillierte Herleitung verzichtet werden, welche allerdings in [9, 8] zu finden ist. Alle Plattenformulierungen aus Tab. 1 bilden das gleiche Plattenmodell nach Mindlin ab. Lediglich die kinematischen Gleichungen werden durch unterschiedliche primäre Größen parametrisiert. Werden diese Plattenformulierungen im Rahmen der FEM oder der IGA verwendet, weisen die daraus entstehenden finiten Plattenelemente jedoch unterschiedliche Eigenschaften auf.

Bei der gewöhnlichen M-st-Formulierung (st = standard) werden die Gesamtverschiebung  $v$  der Plattenmittelfläche sowie die beiden Gesamtquerschnittsrotationen  $\varphi_x$  und  $\varphi_y$  als primäre Verschiebungsparameter verwendet. Im Rahmen eines numerischen Lösungsverfahrens wie der FEM tritt bei Verwendung gleicher Ansatzräume für diese drei Primärvariablen Querschublocking für Biegung um beide Achsen auf. Wie auch bei Balken- und Schalenformulierungen können die im dünnen Grenzfall  $d \rightarrow 0$  vorherrschenden Zwangsbedingungen

$\gamma_{xz} = 0$  und  $\gamma_{yz} = 0$  nicht ohne zusätzliche Anwendung von Methoden aus der Finite-Elemente-Technologie erfüllt werden.

Durch hierarchische Reparametrisierung der Kinematik lassen sich die genannten Zwangsbedingungen einfach erfüllen, da die beiden Schubverzerrungen jeweils von nur einem Parameter abhängig sind. Ergeben sich diese Parameter zu null, sind die Zwangsbedingungen  $\gamma_{xz} = 0$  und  $\gamma_{yz} = 0$  erfüllt. Da diese Aussage ohne Einschränkung auf ein spezielles Diskretisierungsverfahren getroffen werden kann, sind die beiden Formulierungen M-hr und M-hd *intrinsisch* frei von Querschublocking. Diese beiden Formulierungen sind zudem hierarchisch, da sie das schubstarre Kirchhoff-Plattenmodell als Basismodell im Falle verschwindender Querschubverzerrungen beinhalten, was aus den in Tab. 1 gegebenen Gleichungen zur Berechnung der Krümmungen ersichtlich wird. Hierdurch ergeben sich für die beiden hierarchischen Formulierungen M-hr und M-hd aber auch höhere Anforderungen an die Ansatzräume. Da zweite Ableitungen der Primärvariablen  $v$  bzw.  $v_{s_x}$  und  $v_{s_y}$  auftreten, müssen diese Größen mit mindestens  $C^1$ -kontinuierlichen Ansatzräumen diskretisiert werden, was eine gewöhnliche Finite-Elemente-Diskretisierung ausschließt. Sofern die geforderte  $C^1$ -Kontinuität erfüllt ist, ist die Wahl des Diskretisierungsverfahrens jedoch beliebig.

Die hier relevanten Eigenschaften hierarchischer Formulierungen lassen sich wie folgt zusammenfassen:

1. Hierarchische Formulierungen sind *intrinsisch* frei von Querschublocking, d. h. Querschublocking kann bereits auf Formulierungsebene, vor dem Schritt der Diskretisierung, vermieden werden.
2. Hierarchische Formulierungen stellen durch ihre reparametrisierte Kinematik direkt Querschub-Variablen, wie z. B.  $\gamma_{xz}$  und  $\gamma_{yz}$  oder  $v_{s_x}$  und  $v_{s_y}$ , bereit.

## 3 Numerische Experimente

### 3.1 Übersicht

In den zwei nachfolgenden numerischen Beispielen werden die intrinsischen Eigenschaften hierarchischer Formulierungen für je eine statische und eine dynamische Problemstellung aufgezeigt. Anhand des statischen Falls wird gezeigt, dass Querschublocking vermieden wird. Im Kontext dynamischer Probleme wird demonstriert, dass die zweite Eigenschaft die Entwicklung einer ISMS ermöglicht, die sich in expliziten dynamischen Analysen als effizienzsteigernd erweist. In beiden Fällen wird eine quadratische Plattenstruktur der Kantenlänge  $L = 10$  m mit isogeometrischen Plattenelementen des Polynomgrads  $p = 2$  diskretisiert. Jedoch unterscheiden sich die Materialparameter sowie die gewählte Netzfeinheit. Nachfolgend werden insgesamt fünf unterschiedliche Plattenelemente verwendet:

- **M-st:** Mindlin-Plattenformulierung mit Standard-Kinematik, d. h. mit der Gesamtverschiebung  $v$  und den Gesamtrotationen  $\varphi_x$  und  $\varphi_y$  als Primärvariablen,
- **M-hr:** Mindlin-Plattenformulierung mit hierarchischen Rotationen, d. h. mit der Gesamtverschiebung  $v$  und den Schubrotationen  $\gamma_{xz}$  und  $\gamma_{yz}$  als Primärvariablen, siehe [4],

- **M-hd**: Mindlin-Plattenformulierung mit hierarchischen Verschiebungen, d. h. mit der Gesamtverschiebung  $v$  und den Schubverschiebungen  $v_{s_x}$  und  $v_{s_y}$  als Primärvariablen, siehe [9],
- **M-st-low**: Kinematik analog zu M-st, wobei die Ansätze für  $\varphi_x$  und  $\varphi_y$  eine Ordnung niedriger ( $p = 1$ ) gewählt werden als für  $v$ , siehe [1],
- **M-hr-low**: Kinematik analog zu M-hr, wobei die Ansätze für  $\gamma_{xz}$  und  $\gamma_{yz}$  eine Ordnung niedriger ( $p = 1$ ) gewählt werden als für  $v$ .

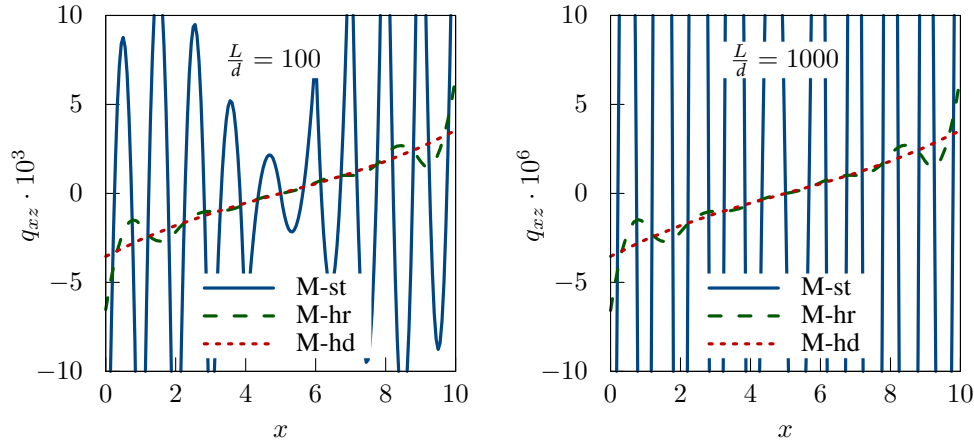
### 3.2 Statisch lineare Analyse einer quadratischen Platte

Zunächst wird eine allseitig gelenkig gelagerte, quadratische Platte unter Gleichlast  $p_z = 1d^3$  untersucht. Der  $E$ -Modul und die Querdehnzahl werden zu  $E = 1000$  und  $\nu = 0,3$  angenommen. Die Platte wird mit lediglich  $10 \times 10$  biquadratischen,  $C^1$ -kontinuierlichen B-Spline-Elementen diskretisiert und im Rahmen einer statisch linearen Berechnung untersucht. Um die aufgeführten Plattenelemente auf Querschublocking und dessen intrinsische Vermeidung zu untersuchen, werden zwei unterschiedliche Schlankheiten,  $\frac{L}{d} = 100$  und  $\frac{L}{d} = 1000$ , gewählt. In Abb. 2 ist die Querkraft  $q_{xz}$  entlang eines Pfades durch die Plattenmitte bei  $y = 5$  m dargestellt. Das Auftreten von Querschublocking ist für das M-st-Element deutlich zu erkennen. Die zu M-st zugehörige Querkraft weist für die Schlankheit  $\frac{L}{d} = 100$  ausgeprägte Oszillationen auf, die sich im sehr dünnen Fall für  $\frac{L}{d} = 1000$  nochmals deutlich verstärken, was die Abhängigkeit der Approximationsgüte von einem sogenannten kritischen Parameter, hier der Schlankheit, zeigt. Die Lösung für  $q_{xz}$  weist bei M-hr nur leichte Oszillationen im Randbereich auf, wobei sich deren Intensität mit zunehmender Schlankheit nicht erhöht. Diese Eigenschaft unterstreicht, dass die M-hr-Formulierung durch einfache Reparametrisierung der Kinematik frei von Querschublocking ist. Durch die vollständig ausgewogenen kinematischen Gleichungen von M-hd, sind hier die Lösungen für die Querkraft  $q_{xz}$  oszillationsfrei und unabhängig von der Schlankheit.

### 3.3 Explizite dynamische Analyse einer quadratischen Platte

Im zweiten numerischen Beispiel wird die Genauigkeit unterschiedlicher Plattenformulierungen in expliziten transienten Analysen untersucht. Wie aus dem statischen Problem des Abschnitts 3.2 ersichtlich ist, leidet die gewöhnliche M-st-Formulierung unter Querschublocking, weshalb ein direkter Ergebnisvergleich mit den intrinsisch lockingfreien hierarchischen Formulierungen M-hr und M-hd zunächst nur eingeschränkt möglich ist. Um die Unterschiede aus Querschublocking aus den nachfolgenden Betrachtungen ausschließen zu können, wird durch ein einheitliches Konzept ein nahezu identisches Strukturverhalten von M-st und M-hr generiert. Dies wird durch die Wahl reduzierter Ansatzräume für die entsprechenden Rotationsvariablen  $\varphi_x$  und  $\varphi_y$  bzw.  $\gamma_{xz}$  und  $\gamma_{yz}$  für die Plattenelemente M-st-low bzw. M-hr-low erreicht. Dieser Aspekt kann im Rahmen dieses Beitrags nicht im Detail beleuchtet werden, wird jedoch in [10] für Balken und in [7] für Platten diskutiert.

Da die Elemente M-st-low bzw. M-hr-low ein nahezu gleiches Verhalten aufweisen und Querschublocking bei beiden Elementen beseitigt bzw. vermieden wird, lässt sich der Einfluss der

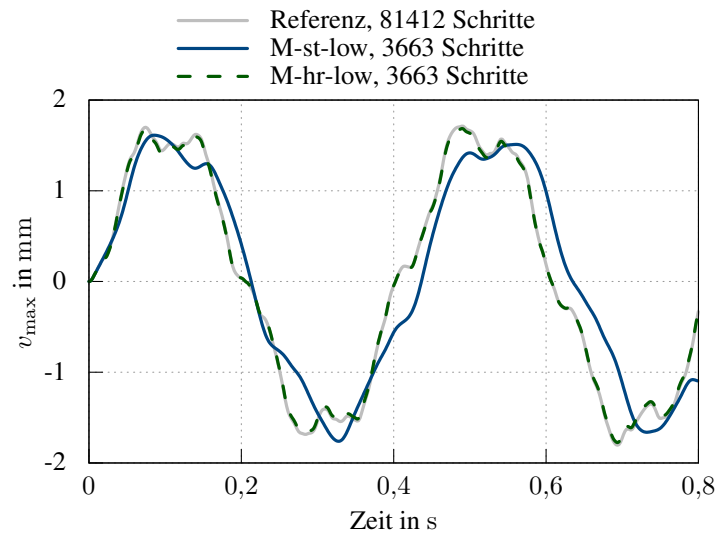


**Abbildung 2:** Quadratische Platte, statisch lineare Analyse, Querkraft  $q_{xz}$  bei  $y = 5$  m, links:  $\frac{L}{d} = 100$ , rechts:  $\frac{L}{d} = 1000$ .

unterschiedlichen Parametrisierung der kinematischen Gleichungen auf explizite Zeitintegrationsverfahren und darin häufig verwendete (selektive) Massenskalierungsmethoden untersuchen. Die Grundidee von Massenskalierungsmethoden ist die Vergrößerung der kritischen Zeitschrittweite  $\Delta t_{\text{crit}} = \frac{2}{\omega_{\text{max}}}$ , die von der höchsten Eigenfrequenz des diskreten Systems abhängt und die Effizienz expliziter Zeitintegrationsverfahren maßgeblich beeinflusst. Eine Vergrößerung von  $\Delta t_{\text{crit}}$  wird in der Regel durch eine künstliche Skalierung der Masse erreicht. Diese Erhöhung der Masse ist zunächst natürlich unphysikalisch. In diesem Beitrag wird jedoch gezeigt, dass die ISMS für eine typische Problemstellung effektiv, genau und deutlich effizienzsteigernd ist.

Bei der Problemstellung handelt es sich erneut um eine allseitig gelenkig gelagerte, quadratische Platte. Allerdings betrachten wir in diesem Beispiel für  $d = 0,05$  m ein Schlankheitsverhältnis von  $\frac{L}{d} = 200$ , was für zukünftig anvisierte Schalenprobleme einen realistischen Wert darstellt, für eine typische Hochbauplatte jedoch von akademischer Natur ist. Die Materialparameter werden definiert zu Elastizitätsmodul  $E = 2,1 \cdot 10^{11}$  N/m<sup>2</sup>, Querdehnzahl  $\nu = 0,3$ , Schubkorrekturfaktor  $\kappa = 5/6$  und Dichte  $\rho = 7800$  kg/m<sup>3</sup>. Die Platte wird mit einer Flächenlast von  $p_z = 10d^3$  MN/m<sup>2</sup> im Zeitraum  $0 \leq t \leq 0,005$  s belastet und ist mit  $19 \times 19$  quadratischen,  $C^1$ -kontinuierlichen isogeometrischen Plattenelementen diskretisiert.

Die höchste Eigenkreisfrequenz  $\omega_{\text{max}}$  hängt für schubweiche Plattenformulierungen von der höchsten Querschubfrequenz ab. Eine selektive Massenskalierung hat eine Effizienzsteigerung zum Ziel, was durch Skalierung dieser Querschubfrequenzen bewirkt wird. Dabei sollen die Biegefrequenzen möglichst wenig beeinflusst werden, da diese für das Strukturverhalten von großer Bedeutung sind. Da bei schubweichen Plattenformulierungen die rotatorische Masse von der translatorischen Masse getrennt berechnet werden kann, werden für beide Plattenelemente M-st und M-hr lediglich die rotatorischen Anteile der konzentrierten Massenmatrix mit einem Massenskalierungsfaktor  $\alpha$  multipliziert. Für diese sehr schlanke Struktur lassen sich bis zu 95,5 % der Anzahl an Zeitschritten und somit der Rechenkosten



**Abbildung 3:** Quadratische Platte, explizite dynamische Analyse, Zeitverlauf der Mittelpunktverschiebung  $v_{\max}$  für M-st-low und M-hr-low.

einsparen.

Abb. 3 zeigt die transiente Lösung der Mittelpunktverschiebung für die Elemente M-st-low und M-hr-low. Die Referenzkurve ist für M-st-low und M-hr-low identisch, jedoch unterscheiden sich die Ergebnisse im Fall skalierten Massen deutlich. Während die Ergebnisse für M-hr-low für nur 4,5 % der benötigten Zeitschritte nahezu gleich der Referenzkurve sind, sind große Abweichungen für M-st-low zu erkennen. Die Überlegenheit von M-hr-low ist dadurch zu begründen, dass hier lediglich die Schubrotatorische Masse erhöht wird, was ein intrinsisch selektives Skalieren der Querschubfrequenzen ermöglicht, während bei M-st-low durch Massenskalierung auch die wichtigen Biegefrequenzen in Mitleidenschaft gezogen werden.

## 4 Zusammenfassung und Ausblick

Im vorliegenden Beitrag wurden die intrinsischen Eigenschaften hierarchischer Formulierungen für statische und explizite dynamische Analysen von Flächentragwerken diskutiert. Die geschickte hierarchische Reparametrisierung der Kinematik führt zu Elementen, die intrinsisch frei von Querschublocking sind. Die direkte Parametrisierung durch Querschubvariablen zeigt ihre Vorzüge im Rahmen der ISMS für explizite dynamische Analysen. Die ISMS ermöglicht eine gezielte Modifikation der Querschubfrequenzen, ohne dabei die Biegefrequenzen zu beeinflussen. Somit kann auf einfache und effektive Art und Weise die Effizienz expliziter Analysen verbessert werden. Die hier dargestellten Ergebnisse sind auf Plattenformulierungen beschränkt. Die Erweiterung der ISMS auf nichtlineare isogeometrische Schalelemente ist Gegenstand aktueller Forschung.

## Danksagung

Die Autoren bedanken sich für die finanzielle Unterstützung durch die Deutsche Forschungsgemeinschaft (DFG) im Rahmen des Projekts OE 728/1-1 – 428725889.

## Literatur

- [1] BEIRÃO DA VEIGA, L. ; BUFFA, A. ; LOVADINA, C. ; MARTINELLI, M. ; SANGALLI, G. : An isogeometric method for the Reissner–Mindlin plate bending problem. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 209–212 (2012), 45–53. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2011.10.009>
- [2] BENSON, D. J. ; BAZILEVS, Y. ; HSU, M. C. ; HUGHES, T. J. R.: Isogeometric shell analysis: The Reissner-Mindlin shell. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 199 (2010), 276–289. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2009.05.011>
- [3] DORNISCH, W. ; KLINKEL, S. ; SIMEON, B. : Isogeometric Reissner–Mindlin shell analysis with exactly calculated director vectors. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 253 (2013), 491–504. <http://dx.doi.org/10.1016/j.cma.2012.09.010>. – DOI 10.1016/j.cma.2012.09.010
- [4] ECHTER, R. ; OESTERLE, B. ; BISCHOFF, M. : A hierarchic family of isogeometric shell finite elements. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 254 (2013), 170–180. <http://dx.doi.org/10.1016/j.cma.2012.10.018>
- [5] HUGHES, T. J. R. ; COTTRELL, J. A. ; BAZILEVS, Y. : Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 194 (2005), Nr. 39-41, 4135–4195. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2004.10.008>
- [6] KIENDL, J. ; BLETZINGER, K. U. ; LINHARD, J. ; WÜCHNER, R. : Isogeometric shell analysis with Kirchhoff–Love elements. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 198 (2009), Nr. 49–52, 3902–3914. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2009.08.013>
- [7] KRAUSS, L.-M. ; THIERER, R. ; BISCHOFF, M. ; OESTERLE, B. : Intrinsically Selective Mass Scaling with Hierarchic Plate Formulations. (2024, in preparation.)
- [8] OESTERLE, B. : *Intrinsisch lockingfreie Schalenformulierungen*. Stuttgart, Universität Stuttgart, Dissertation, 2018. <http://dx.doi.org/10.18419/opus-10046>
- [9] OESTERLE, B. ; SACHSE, R. ; RAMM, E. ; BISCHOFF, M. : Hierarchic isogeometric large rotation shell elements including linearized transverse shear parametrization. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 321 (2017), 383–405. <http://dx.doi.org/10.1016/j.cma.2017.03.031>



- [10] OESTERLE, B. ; TRIPPMACHER, J. ; TKACHUK, A. ; BISCHOFF, M. : Intrinsically Selective Mass Scaling with Hierarchic Structural Element Formulations. In: *Book of Extended Abstracts of the 6th ECCOMAS Young Investigators Conference, 7th-9th July 2021, Valencia, Spain (2021)*, 99–108. <https://doi.org/10.4995/YIC2021.2021.12418>
- [11] THIERER, R. ; OESTERLE, B. ; RAMM, E. ; BISCHOFF, M. : Transverse shear parametrization in hierarchic large rotation shell formulations. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* (2024, accepted for publication)