

# Daten-basierte Materialmodellierung und Simulation von Holztragwerken mit künstlichen neuronalen Netzen

Patrick Weber, Werner Wagner, Steffen Freitag

*Institut für Baustatik, Karlsruher Institut für Technologie*

**Zusammenfassung:** Ein künstliches neuronales Netz (KNN) mit Feedforward-Architektur wird zur Approximation des proportionalen, nichtlinearen Materialverhaltens von Fichtenholz verwendet. Die zugehörigen Daten stammen von Experimenten an biaxial und quer zur Faser beanspruchten Fichtenholzscheiben. Durch die Einforderung physikalischer Nebenbedingungen im KNN-Trainingsprozess ist ein numerisch stabiler Einsatz des KNN-Materialmodells im Rahmen der Finite-Elemente-Methode (FEM) möglich.

## 1 Einleitung

Ein klassisches statisches Modell fußt auf drei Säulen: Kinematik, Gleichgewicht und Materialmodell. Die ersten beiden sind aus mathematischen und physikalischen Grundsätzen hergeleitet. Im Gegensatz dazu basiert ein Materialmodell auf experimentellen Beobachtungen und einem empirischen mathematischen Formalismus. Je komplexer das Materialverhalten ist, desto schwieriger ist die Suche nach einem geeigneten Modell. Ein KNN besteht aus einer variablen Verkettung einfacher Basisfunktionen. Durch diese Struktur sind KNN *universelle Funktionsapproximatoren*, die bei endlichem Verkettungsgrad Funktionen mit beliebiger Genauigkeit approximieren können, vgl. [1]. Somit stellen KNN geeignete Methoden zur Erfassung komplexen Materialverhaltens dar. Dazu müssen KNN allerdings mit einer sehr großen Menge von Daten trainiert werden. Im Fall der Materialmodellierung wären dies bspw. aus Experimenten gewonnene Paare aus Verzerrungen und Spannungen. Der Nachteil ist, dass KNN grundsätzlich rein mathematische Funktionen sind, die keinen physikalischen Regeln unterliegen. Dies führt in Verbindung mit einer begrenzten Datenmenge häufig zu nicht stabilen und damit unbrauchbaren Materialmodellen. Eine Möglichkeit diesen Nachteilen entgegenzuwirken ist die Einforderung physikalischer Nebenbedingungen im Trainingsprozess, vgl. [5, 6, 7]. Die resultierenden KNN-Materialmodelle benötigen dadurch weniger

Daten und sind im Rahmen numerischer FE-Simulationen robuster. In diesem Beitrag wird dieses erweiterte KNN-Training auf experimentelle Daten von Fichtenholz angewendet und in einer nichtlinearen FE-Simulation erprobt.

## 2 Biaxial und quer zur Faser beanspruchte Holzscheiben

In [2] sind u. a. 439 proportionale Versuche an homogenen, fehlerfreien und klimatisierten Kernbrettern aus Fichtenholz dokumentiert, die biaxial und schräg zur Faserrichtung im ebenen Spannungszustand und bis zum Bruch beansprucht wurden. Die Versuche wurden so durchgeführt, dass im globalen 1-2-Koordinatensystem mit

$$\boldsymbol{\varepsilon}_G = [\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, 2\varepsilon_{12} = \gamma_{12}]^T \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\sigma}_G = [\sigma_{11}, \sigma_{22}, \tau_{12} = 0]^T \quad (1)$$

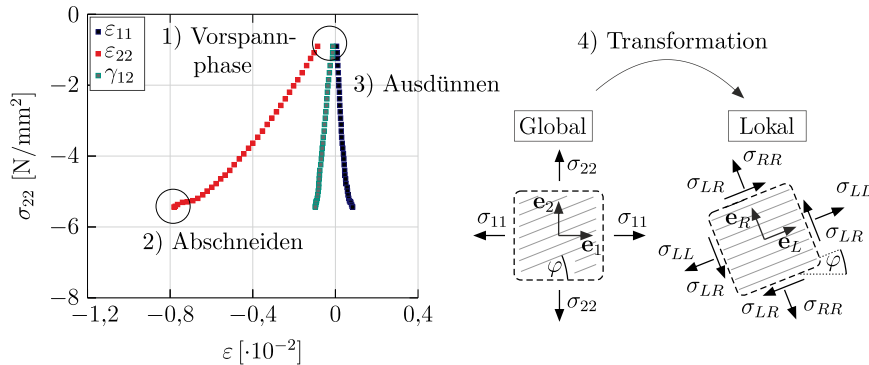
die Schubspannungen  $\tau_{12}$  stets null sind, was einem Hauptachsensystem entspricht. In Abb. 1 ist ein Überblick über die automatisierte Aufbereitung der zur Verfügung stehenden Rohdatenpaare am Beispiel von Versuch 380 [2] gegeben. Zunächst werden die Verzerrungen infolge des initialen Vorspannprozesses abgeschätzt. Anschließend werden die Daten beim optisch Erkennbaren Auftreten einer Schädigung abgeschnitten. Weiterhin wird jeder Pfad auf ca. 30 Datenpaare  $(\boldsymbol{\varepsilon}_G, \boldsymbol{\sigma}_G)$  ausgedünnt, um redundante Information zu minimieren. Mithilfe des gegebenen Versuchs-Faserwinkels  $\varphi \in \{0^\circ; 7,5^\circ; 15^\circ; 30^\circ; 45^\circ\}$  und der Matrix

$$\mathbf{T}_\varepsilon = \begin{bmatrix} \cos(\varphi)^2 & \sin(\varphi)^2 & \sin(\varphi)\cos(\varphi) \\ \sin(\varphi)^2 & \cos(\varphi)^2 & -\sin(\varphi)\cos(\varphi) \\ -2\sin(\varphi)\cos(\varphi) & 2\sin(\varphi)\cos(\varphi) & \cos(\varphi)^2 - \sin(\varphi)^2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

können die globalen Verzerrungen und Spannungen über

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{T}_\varepsilon \boldsymbol{\varepsilon}_G = [\varepsilon_{LL}, \varepsilon_{RR}, \gamma_{LR}]^T \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\sigma} = (\mathbf{T}_\varepsilon)^{-T} \boldsymbol{\sigma}_G = [\sigma_{LL}, \sigma_{RR}, \tau_{LR}]^T \quad (3)$$

in die Größen des lokalen  $L$ - $R$ -Koordinatensystems transformiert werden, wobei  $L$  der Stammlängsrichtung und  $R$  der radialen Richtung entspricht. Von den insgesamt 439 Versuchen werden 394 für die nachfolgenden Untersuchungen verwendet. Daraus resultieren letztlich 14487 Gleichgewichtspunkte  $(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma})$ .



**Abbildung 1:** Aufbereitung der Rohdaten am Beispiel von Versuch 380 [2]

### 3 Materialmodellierung mit Feedforward-KNN

Ein Feedforward-KNN kann allgemein als eine Funktion

$$\mathbf{z} = \mathbf{f}^{\text{KNN}}(\mathbf{x}, \mathbf{w}) \quad (4)$$

beschrieben werden, welche den  $n_i$ -dimensionalen Eingangsvektor  $\mathbf{x}$  auf den  $n_o$ -dimensionalen Ausgangsvektor  $\mathbf{z}$  abbildet. Die freien Parameter, die *Gewichte*, werden im  $n_w$ -dimensionalen Vektor  $\mathbf{w}$  zusammengefasst. Im Detail besteht ein Feedforward-KNN aus einer beliebigen Anzahl aufeinanderfolgender Schichten, die Informationen ausgehend von der Eingangsschicht über beliebig viele Zwischenschichten hin zur Ausgangsschicht übertragen. In Abb. 2 ist ein Beispiel der Topologie [2-3-1] dargestellt. Allgemein erfolgt die Informationsübertragung aller Neuronen  $l = 1, \dots, n_{L-1}$  der Schicht  $L - 1$  auf das Neuron  $m$  der nächsten Schicht  $L$  über die gewichtete Summe  $s_m^{[L]}$  und die Aktivierungsfunktion  $g(s)$ :

$$s_m^{[L]} = w_{m0}^{[L]} + \sum_{l=1}^{n_{L-1}} w_{ml}^{[L]} y_l^{[L-1]}, \quad (5)$$

$$y_m^{[L]} = g(s_m^{[L]}). \quad (6)$$

Das sog. Biasgewicht  $w_{m0}^{[L]}$  erlaubt dabei eine  $s$ -Achsenverschiebung der Aktivierungsfunktion. Nachfolgend wird für alle Zwischenschichten der Tangens hyperbolicus  $g(s) = \tanh(s)$  gewählt. Für die Ausgangsschicht gilt  $g(s) = s$ . Je mehr Zwischenschichten und Neuronen verwendet werden, desto komplexere funktionale Zusammenhänge sind approximierbar. Allerdings steigt dadurch auch die Anzahl der Gewichte, die im Trainingsprozess bestimmt werden müssen. Darüber hinaus sind die Gewichte rein mathematische und keine physikalischen Variablen: Aus ihren Werten lassen sich keine Schlüsse auf die zugrundeliegende und zu lernende Aufgabe ziehen. Dadurch werden KNN auch gerne als *black box* bezeichnet.

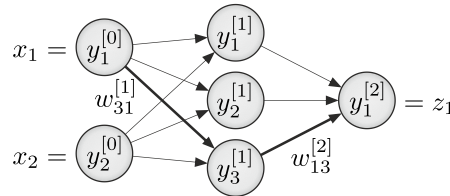


Abbildung 2: Beispieltopologie [2-3-1] eines Feedforward-KNN

Durch geeignete Definitionen der Eingangs- und Ausgangsvariablen  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{z}$  kann das Feedforward-KNN zur Approximation verschiedensten Materialverhaltens eingesetzt werden. Für das nachfolgende Beispiel reicht es, die lokalen Verzerrungen und Spannungen über

$$\mathbf{x} := \boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_{LL}, \varepsilon_{RR}, \gamma_{LR}]^T \quad \text{und} \quad \mathbf{z} := \boldsymbol{\sigma} = [\sigma_{LL}, \sigma_{RR}, \tau_{LR}]^T \quad (7)$$

direkt als KNN-Eingangs- und Ausgangsvektoren zu definieren. Ferner ist die KNN-Funktion aus Gl. (4) stetig differenzierbar, wodurch die nötigen Ableitungen für die Materialtangente

$$\mathbf{C}_T = \begin{bmatrix} C_{LLLL} & C_{LLRR} & C_{LLLR} \\ C_{RRLL} & C_{RRRR} & C_{RRLR} \\ C_{LRLL} & C_{LRRR} & C_{LRLR} \end{bmatrix} =: \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} = \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{d\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{d\mathbf{z}}{d\mathbf{x}} \quad (8)$$

analytisch berechnet werden können. Dieses elastische KNN-Materialmodell ist in der Lage nichtlineare, anisotrope Effekte bei monotoner Belastungssteigerung zu berücksichtigen.

Die KNN-Gewichte  $\mathbf{w}$  werden im Trainingsprozess eingestellt. Dieser ist ein nichtlineares Optimierungsproblem, bei dem hier der quadratische Trainingsdatenfehler

$$\mathcal{L}^D = \frac{1}{2P^D} \sum_{k=1}^{P^D} \|\mathbf{z}(\boldsymbol{\varepsilon}_k, \mathbf{w}) - \boldsymbol{\sigma}_k\|^2 \quad (9)$$

zwischen den Zielspannungen  $\boldsymbol{\sigma}_k$  der insgesamt  $P^D$  gegebenen Trainingsdaten  $(\boldsymbol{\varepsilon}_k, \boldsymbol{\sigma}_k)$  und der zugehörigen KNN-Funktion  $\mathbf{z}(\boldsymbol{\varepsilon}_k, \mathbf{w})$  iterativ minimiert wird. Diese Minimierung wird für alle nachfolgenden Beispiele in Matlab [4] durchgeführt. Die KNN-Funktion und der Trainingsprozess sind grundsätzlich rein mathematischer Natur. Physikalische Eigenschaften werden im besten Fall implizit und unter Verwendung sehr vieler Daten erlernt. Grundlegende physikalische Zusammenhänge der Materialmodellierung werden somit bei rein Daten-basierten Methoden vernachlässigt. Daher zielen jüngste Bestrebungen darauf ab, diese bekannten physikalischen Eigenschaften bei der KNN-Materialmodellierung zu berücksichtigen. Im Rahmen des vorliegenden Beitrags werden dazu zusätzliche zu minimierende Fehlerterme definiert und während des Trainings ebenfalls minimiert. Tab. 1 gibt einen Überblick über die hier verwendeten Nebenbedingungen (NB). Sowohl die lokalen Spannungen als KNN-Ausgang  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{z}(\mathbf{x}, \mathbf{w})$  als auch die Materialtangente als deren Ableitung  $\mathbf{C}_T = d\mathbf{z}(\mathbf{x}, \mathbf{w})/d\mathbf{x}$  hängen neben den Gewichten  $\mathbf{w}$  auch vom KNN-Eingangsvektor  $\mathbf{x}$  ab. Zur Formulierung einer zu minimierenden Fehlerfunktion müssen die NB daher auf einer diskreten Menge von NB-Punkten  $\mathbf{x}_k^C, k = 1, \dots, P^C$  eingefordert werden. Diese sind unabhängig von den gegebenen Trainingsdaten und können in beliebiger Stückzahl für den Trainingsprozess generiert werden. Darüber hinaus werden die NB ebenfalls über quadratische Fehlerterme eingefordert. So folgt bspw. für die Symmetrie der Materialtangente die zusätzlich zu minimierende Fehlerfunktion

$$\mathcal{L}^C = \frac{\epsilon}{2P^C} \sum_{k=1}^{P^C} \left( (C_{12k} - C_{21k})^2 + (C_{13k} - C_{31k})^2 + (C_{23k} - C_{32k})^2 \right), \quad (10)$$

mit  $C_{ijk} := \partial z_j(\mathbf{x}_k^C, \mathbf{w}) / \partial x_i$ . Über den Penalty-Parameter  $\epsilon > 0$  lassen sich die NB gegenüber dem Trainingsdatenfehler (9) gewichten. Nähere Informationen zur Implementierung beliebiger NB können [5, 6, 7] entnommen werden.

Eigenschaft	Zu minimierende Fehlerterme
Spannungsfreie Referenzkonfiguration:	$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0}) \stackrel{!}{=} \mathbf{0}$
Symmetrie der Materialtangente:	$(C_{ij} - C_{ji}) \stackrel{!}{=} 0, (i,j) = (1,2),(1,3),(2,3)$
Orthotropie:	$C_{ij} \stackrel{!}{=} 0, (i,j) = (1,3),(2,3),(3,1),(3,2)$
Positive Hauptdiagonalelemente:	$C_{ii} \stackrel{!}{>} 0, i = 1,2,3$

**Tabelle 1:** Im Trainingsprozess einforderbare Nebenbedingungen (NB)

## 4 Berechnung eines Bogenträgers als numerisches Beispiel

Von den verfügbaren 14478 Datenpaaren  $(\varepsilon, \sigma)$  werden 90% zum Training und 10% zur Validierung genutzt. Mit den Trainingsdatenpaaren wird ein KNN der Topologie [3-10-10-3] für insgesamt  $10^4$  Iterationsschritte trainiert. Neben den experimentellen Daten werden dabei auch die vier Nebenbedingungen (NB) aus Tab. 1 verwendet. Für die NB der positiven Hauptdiagonalelemente gilt  $\epsilon = 10^6$ , sonst  $\epsilon = 10^4$ . Alle NB werden mit  $10^3$  zufällig generierten NB-Punkten im alle Verzerrungsdaten umhüllenden Quader eingefordert.

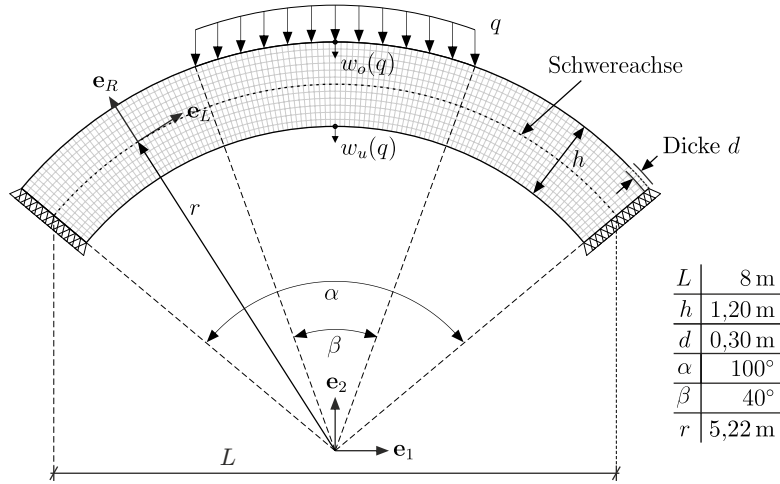


Abbildung 3: Bogenträger aus Holz: System, Lagerung und Belastung

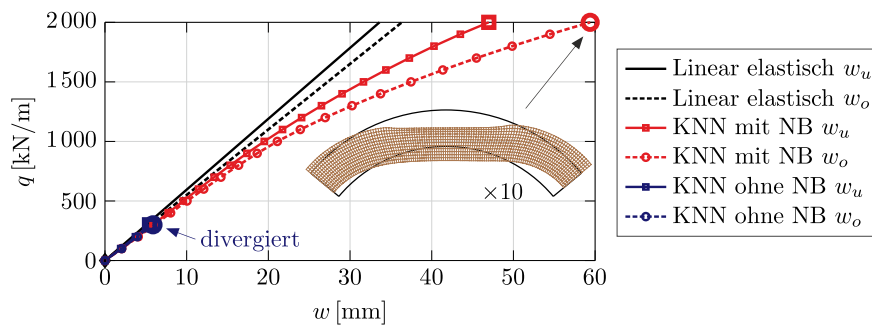
Als Beispiel dient die Berechnung eines Holz-Bogenträgers im ebenen Spannungszustand und unter monotoner Belastungssteigerung. Das System, die Lagerungsbedingungen sowie die Belastung sind in Abb. 3 dargestellt. Die konstante Streckenlast  $q$  wirkt vertikal und greift an der Oberseite des Trägers an. Die lokalen Materialhauptachsen verlaufen längs der gebogenen Trägerachse. Das FE-Netz besteht aus  $120 \times 36 = 4320$  isoparametrischen Scheibenelementen mit bilinearen Ansatzfunktionen. Aus Übersichtsgründen ist in Abb. 3 nur ein  $120 \times 12$ -Netz dargestellt. Innerhalb dieser Elemente, jeweils mit Fläche  $A^e$  und Dicke  $d$ , wird das nichtlinear elastische KNN-Materialmodell im Vektor der inneren Kräfte

$$\mathbf{F}_e = \int_{A^e} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} d d A \quad (11)$$

und dem materiellen Anteil der tangentialen Steifigkeitsmatrix

$$\mathbf{K}_{Te} = \int_{A^e} \mathbf{B}^T \mathbf{C}_T \mathbf{B} d d A . \quad (12)$$

aufgerufen. Dabei enthält die Matrix  $\mathbf{B}$  die Ableitungen der Ansatzfunktionen aus der Scheibenkinematik und  $\boldsymbol{\sigma}$  und  $\mathbf{C}_T$  werden vom KNN berechnet. Weitere Details können bspw. [8]

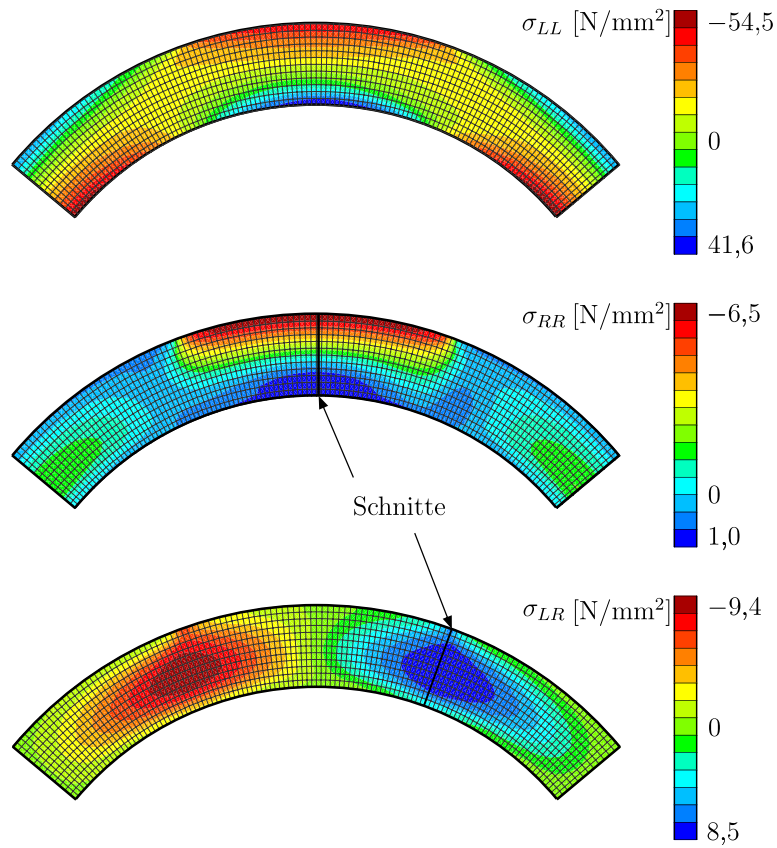


**Abbildung 4:** Last-Verschiebungskurven für die Verschiebungen  $w_o(q)$  und  $w_u(q)$

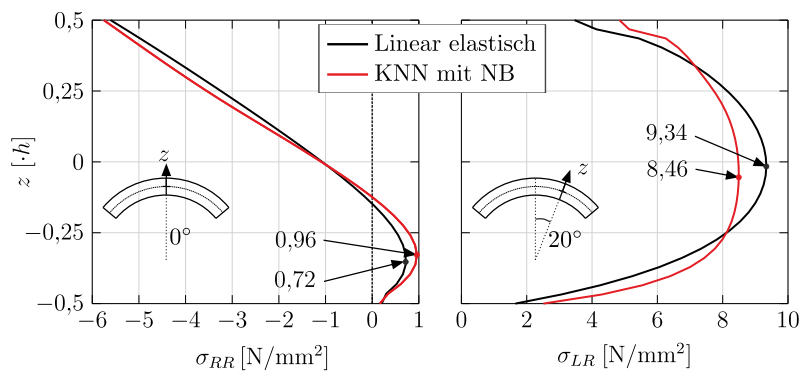
entnommen werden. Das KNN ist in der Materialbibliothek einer erweiterten Version des FE-Programms FEAP [3] implementiert. Die anwendungsspezifischen Informationen, wie die Definition der Eingangs- und Ausgangsvariablen, die Topologie sowie die Gewichte, werden über eine Textdatei von Matlab an FEAP übergeben.

In Abb. 4 sind die Last-Verschiebungskurven für die Verschiebungen  $w_o(q)$  und  $w_u(q)$  an der Ober- und Unterseite des Trägers dargestellt. Dabei wird zwischen einem KNN-Materialmodell mit NB und ohne NB im Trainingsprozess unterschieden. Darüber hinaus ist für den Fall des KNN mit NB nach dem letzten Lastschritt die zehnfach überhöhte Verschiebungsfigur abgebildet. Das KNN ohne NB divergiert sehr früh, während das KNN mit NB die vollständige Berechnung des Versuchs erlaubt. Dabei kann das weicher werdende Verhalten quer zur Faserrichtung wiedergeben werden, was aus der materiellen Nichtlinearität des Holzes resultiert. Neben den KNN-Lösungen ist eine linear elastische Lösung in Abb. 4 dargestellt. Mithilfe der mittleren Dichte  $\rho = 0,438 \text{ kg/cm}^3$  der im KNN-Training genutzten Versuche und den Regressionskurven für  $E_L$ ,  $E_R$  und  $\nu_{LR}$  aus [2] wurden dazu die Parameter  $E_L = 12561 \text{ N/mm}^2$ ,  $E_R = 744 \text{ N/mm}^2$  und  $\nu_{LR} = 0,499$  ermittelt. Der Schubmodul wird über die Beziehung  $G_{LR} = E_L E_R / (E_L + E_R + 2\nu_{LR} E_R)$  abgeschätzt, vgl. [2]. Die Anfangssteigungen stimmen dabei nicht exakt mit der Lösung des linear elastischen Referenzmaterials überein. Letzteres basiert auf der Mittelung von Materialparametern, welche aus unabhängigen uniaxialen Versuchen ermittelt wurden. Die KNN-Lösung basiert auf der direkten Mittelung der biaxialen Daten, ohne Umweg über die Ingenieurkonstanten.

In Abb. 5 sind die Verläufe der Spannungen  $\sigma_{LL}$ ,  $\sigma_{RR}$  und  $\sigma_{LR}$  über die gesamte Struktur nach dem zwanzigsten und damit letzten Lastschritt für das KNN mit NB dargestellt. Das KNN ist in der Lage, einen physikalisch plausiblen Verlauf der Spannungen vorherzusagen. Dabei wird durch die nicht perfekte Orthotropie des KNN die Symmetrie des Systems nicht exakt abgebildet. Die minimale Längsdruckspannung liegt dabei knapp über der in [2] angegebenen uniaxialen Bruchspannung von  $f_{c,0} = 49,98 \text{ N/mm}^2$ . Die Verläufe der Spannungen  $\sigma_{RR}$  und  $\sigma_{LR}$  in den in Abb. 5 angedeuteten Schnitten sind in Abb. 6 dargestellt und sind den Ergebnissen des linear elastischen Vergleichsmaterials gegenübergestellt. Die prinzipiellen Verläufe stimmen dabei überein. Die KNN-Lösung liefert eine um 30% höhere maximale Querkzugspannung. Die am Ende der Streckenlast entstehende maximale Schubspannung ist beim KNN-Materialmodell um 10% geringer. Beide Unterschiede können aus Lastumlagerungen innerhalb des Trägers resultieren, die infolge nichtlinearer Deformation entstehen.



**Abbildung 5:** Verläufe der Spannungen  $\sigma_{LL}$ ,  $\sigma_{RR}$  und  $\sigma_{LR}$  über die gesamte Struktur, KNN-Materialmodell mit NB nach dem letzten Lastschritt ( $q = 2000 \text{ kN/m}$ ). Die Verläufe in den Schnitten sind in Abb. 6 dargestellt.



**Abbildung 6:** Verläufe der Spannungen  $\sigma_{RR}$  und  $\sigma_{LR}$  in den in Abb. 5 angedeuteten Schnitten nach dem letzten Lastschritt ( $q = 2000 \text{ kN/m}$ )

## 5 Fazit und Diskussion

Die vorangegangenen Untersuchungen haben gezeigt, dass die KNN-Materialmodellierung auf Basis echter und streuungsbehafteter Versuchsdaten prinzipiell möglich ist. Trotz guter Datengrundlage erlaubt dabei erst die Berücksichtigung physikalischer Nebenbedingungen die stabile Anwendung des KNN-Materialmodells im Rahmen einer FE-Simulation. Dabei wurde zunächst eine Beschränkung auf proportionale Laststeigerung und fehlerfreies Holz angenommen. Im Hinblick auf eine Anwendung im Ingenieuralltag sind einige Punkte jedoch noch kritisch zu diskutieren. Beispielsweise haben Holzfehler einen großen Einfluss auf das resultierende Werkstoffverhalten. Darüber hinaus liefert das KNN ein über streuende Daten gemitteltes, nicht parametrisierbares Materialmodell. Im Rahmen eines semiprobabilistischen Sicherheitskonzepts können somit keine Abminderungen oder konservative Schätzungen von Materialparametern durchgeführt werden. Außerdem ist das KNN-Materialmodell infolge des stochastischen Trainingsprozesses keineswegs eindeutig. Trotz dieser noch zu klärenden Punkte könnte die KNN-Materialmodellierung auch für den praktischen Bauingenieur in Zukunft interessant werden, vor allem bei der Arbeit mit neuen Materialien.

## Danksagung

Herr Univ.-Prof. Josef Eberhardsteiner hat uns die zu den Versuchen aus [2] zugehörigen Rohdaten zur Verfügung gestellt. Dafür möchten wir uns recht herzlich bei ihm bedanken.

## Literatur

- [1] CYBENKO, G. : Approximation by superpositions of a sigmoidal function. In: *Mathematics of Control, Signals, and Systems 2* (1989), dec, Nr. 4, S. 303–314
- [2] EBERHARDSTEINER, J. : *Mechanisches Verhalten von Fichtenholz*. Springer Vienna, 2002
- [3] TAYLOR, R. : *FEAP - Finite Element Analysis Program*. University of California, Berkeley, 2023. – <http://projects.ce.berkeley.edu/feap/> (besucht am 10.03.23)
- [4] THE MATHWORKS INC.: *MATLAB version: 9.11.0 (R2021b)*
- [5] WEBER, P. : *Physikalisch konsistente Modellierung von elastischem und plastischem Materialverhalten mit künstlichen neuronalen Netzen*, Karlsruher Institut für Technologie, Diss., 2023 (eingereicht)
- [6] WEBER, P. ; GEIGER, J. ; WAGNER, W. : Constrained neural network training and its application to hyperelastic material modeling. In: *Comput Mech* 68 (2021), S. 1179–1204
- [7] WEBER, P. ; WAGNER, W. ; FREITAG, S. : Physically enhanced training for modeling rate-independent plasticity with feedforward neural networks. In: *Comput Mech* (2023)
- [8] WRIGGERS, P. : *Nonlinear Finite Element Methods*. Springer Berlin / Heidelberg, 2008