Baustatik – Baupraxis 15, © 2024, Technische Universität Hamburg

Baustatische Methoden für Entwurf, Auslegung und Betrieb adaptiver Tragwerke

Lisa-Marie Krauß[1], Mathias Maierhofer[2], Tamara Prokosch[1], Axel Trautwein[1], Malte von Scheven[1], Achim Menges[2], Manfred Bischoff[1]

[1] *Universität Stuttgart, Institut für Baustatik und Baudynamik*
[2] *Universität Stuttgart, Institut für Computerbasiertes Entwerfen und Baufertigung*

Zusammenfassung: Mit strukturmechanischer Einsicht und der Formulierung von Aktuierungszielen lassen sich Grundsätze für den Entwurf guter adaptiver Tragwerke sowie deren Auslegung ableiten. Dabei kann zwischen einer Adaption zur Reduktion der Verformungen und einer Adaption zur Manipulation der Kräfte im Tragwerk unterschieden werden. Durch den Einsatz von Aktoren zur Kraftmanipulation ist es möglich, die maximale Querschnittsausnutzung in der Struktur bei verschiedenen Belastungen zu reduzieren. Der jeweils optimale Aktuierungszustand ist derjenige, der die maximale Ausnutzung im Tragwerk minimiert. Mithilfe baustatischer Überlegungen kann diese Optimierungsaufgabe durch ein lineares Optimierungsproblem beschrieben und das globale Minimum mit dem Simplex-Algorithmus gefunden werden.

1 Einführung

Adaptive Tragwerke unterscheiden sich von herkömmlichen, passiven Tragwerken durch ihre Fähigkeit sich an externe Lasten anzupassen. Unterschiedliche Aktuierungsziele definieren dabei maßgebliche Kriterien für den Entwurf und die Auslegung adaptiver Tragwerke. Eine mögliche Kategorisierung stellt die Unterteilung in Verschiebungs- und Kraftadaption dar. Bei der Verschiebungsadaption sollen Verformungen reduziert werden. Da durch den Einsatz von Aktorik für die Auslegung der Tragwerke nicht mehr die Steifigkeit, sondern die Festigkeit maßgebend wird, kann der Materialeinsatz signifikant reduziert werden [2]. In [5] wurde gezeigt, dass die notwendige Tragwerksmasse reduziert werden kann, wenn das Tagwerk möglichst steif gegenüber der äußeren Last und möglichst weich gegenüber der Aktuierung ist. Durch den Einbau von Aktoren in statisch bestimmten Tragwerksteilen können Verschiebungen, jedoch keine Kräfte im Tragwerk manipuliert werden. Die Anzahl der Aktoren, die erforderlich ist, um den Aktuierungsraum zur Kraftmanipulation vollständig aufzuspannen, ist gleich dem Grad der statischen Unbestimmtheit. Für die Platzierung der Aktoren können die Eigenschaften der Redundanzmatrix genutzt werden, siehe [3], [2].

Durch die Anwendung des Konzepts der Kraftmanipulation in adaptiven Tragwerken können die Stabkräfte während des Betriebs so manipuliert werden, dass die maximalen Beanspruchungen im Tragwerk reduziert werden. Dies geschieht, indem die Aktorkräfte bzw. -stellwege an die Einwirkungen angepasst werden. Diese Aufgabe kann als Optimierungsproblem betrachtet werden, bei dem die Aktorstellwege als Entwurfsvariable fungieren und die maximale Querschnittsausnutzung im Tragwerk minimiert wird. Im Rahmen des Sonderforschungsbereichs 1244 an der Universität Stuttgart wurde eine adaptive Bank als Fachwerkkonstruktion entwickelt, die auf äußere Lasten reagiert. Diese Struktur wurde beim ersten IBA'27-Festival ausgestellt. Ein wesentlicher Bestandteil der Installation ist eine der adaptiven Bank nachempfundene Lichtkonstruktion zur Visualisierung der Querschnittsausnutzungen im Tragwerk, die durch die Last der Besucher hervorgerufen werden. Der Ausstellungsbeitrag CHANDELIER'1244 wurde vom Institut fur Computerbasiertes Entwerfen und Baufertigung (ICD) der Universität Stuttgart entworfen und realisiert. Durch die interdisziplinäre Zusammenarbeit mit dem Institut für Baustatik und Baudynamik (IBB) der Universität Stuttgart wurde die in diesem Beitrag vorgestellte Optimierung entwickelt, die für die Steuerung der adaptiven Bank angewendet werden kann.

Im optimalen Zustand wird die maximale Ausnutzung der Querschnitte durch die Aktorik minimiert. Die Methodik für die Optimierung wird in diesem Beitrag für allgemeine Fachwerkstrukturen erläutert. Die dafür nötigen Voraussetzungen und Annahmen sowie die Grundlagen der Kraftmanipulation durch Aktorik werden in Kapitel 2 beschrieben. Das zugehörige Optimierungsproblem wird in Kapitel 3 mathematisch formuliert, charakterisiert sowie ein geeigneter Algorithmus zur effizienten Lösung beschrieben. Anschließend werden die Möglichkeiten und Einschränkungen, die sich durch die Kraftmanipulation im Tragwerk mittels Aktorik ergeben, in Kapitel 4 an einem Beispiel untersucht.

2 Kraftmanipulation durch Adaptivität

Für die Auswahl eines geeigneten und effizienten Optimierungsalgorithmus ist eine genaue Kenntnis der Eigenschaften des Optimierungsproblems essenziell. Da Kräfte nur in statisch unbestimmten Tragwerksteilen manipuliert werden können, werden in diesem Beitrag nur Tragwerke ohne statisch bestimmte Tragwerksteile betrachtet. Bei allgemeinen Tragwerken können statisch bestimmte Tragwerksteile mithilfe der Redundanzmatrix identifiziert und vom Optimierungsprozess ausgeschlossen werden.

Die Aktuierung wird im Folgenden als vorgegebene Längenänderungen der aktiven Elemente modelliert. Die Anzahl der Aktoren n_{akt} entspricht dem Grad der statischen Unbestimmtheit n_{S}, wodurch der Aktuierungsraum vollständig aufgespannt wird, wenn die Aktoren so platziert werden, dass die einzelnen Aktuierungszustände linear unabhängig voneinander sind. Der Aktuierungsraum entspricht dem Raum der Eigenspannungszustände, der vom Bild der Redundanzmatrix aufgespannt wird [2]. Die vorgestellte Methode basiert auf dem Superpositionsprinzip und ist daher nur für materielle und geometrische Linearität gültig. Ein adaptiver Normalkraftzustand $\mathbf{N}^{\text{adapt}}$ ergibt sich aus der Summe des passiven Normalkraftzu-

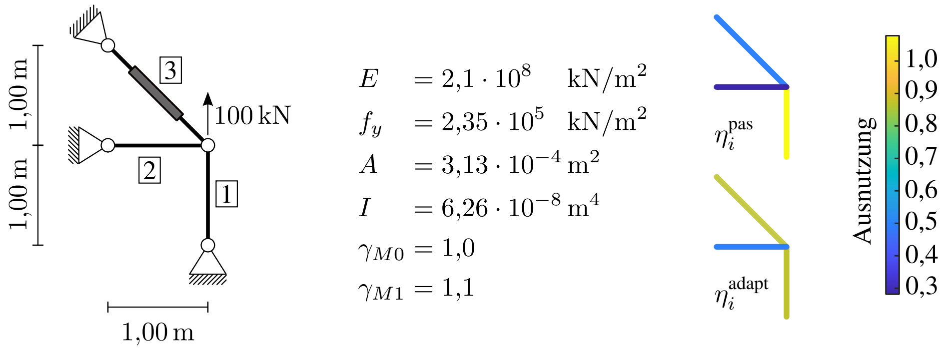

Abbildung 1: Adaptive Beispielstruktur mit $n_{\text{akt}} = n_{\text{S}} = 1$, Material- und Querschnittsparametern sowie ihre Ausnutzung im passiven und adaptiven Zustand

stands $\mathbf{N}^{\text{pas}}$, der durch externe Lasten hervorgerufen wird, und den n_{akt} mit $\Delta l_0^{\text{akt},j}$ multiplizierten Aktuierungszuständen $\mathbf{N}^{\text{akt},j}$

$$\mathbf{N}^{\text{adapt}} = \mathbf{N}^{\text{pas}} + \sum_{j=1}^{n_{\text{akt}}} \Delta l_0^{\text{akt},j} \mathbf{N}^{\text{akt},j}. \tag{1}$$

Die Aktuierungszustände $\mathbf{N}^{\text{akt},j}$ sind Normalkraftverteilungen infolge einer Einheitslängenänderung im jeweiligen Aktorelement und haben entsprechend die Einheit $\mathrm{kN/m}$. Die Unbekannten $\Delta l_0^{\text{akt},j}$ sind die vorgegebenen Längenänderungen in den j Aktorelementen in der Einheit m. Der adaptive Normalkraftzustand ist eine Linearkombination aus dem passiven Normalkraftzustand und den Aktuierungszuständen und entspricht geometrisch betrachtet einer Hyperebene der Dimension $n_{\text{akt}} = n_{\text{S}}$.

Als Minimalbeispiel soll das in Abb. 1 dargestellte Fachwerk aus drei Stäben mit $n_{\text{akt}} = n_{\text{S}} = 1$ dienen, das durch eine externe Last $F = 100\,\mathrm{kN}$ belastet wird. Der E-Modul E und die Festigkeit f_y entsprechen den Eigenschaften von Stahl, der Querschnitt ist durch seine Fläche A und das Flächenträgheitsmoment I definiert. Es werden die im Stahlbau üblichen Teilsicherheitsbeiwerten γ_{M0} für Materialversagen und γ_{M1} für Stabilitätsversagen angesetzt. Die drei Normalkräfte im adaptiven Zustand

$$\mathbf{N}^{\text{adapt}} = \mathbf{N}^{\text{pas}} + \Delta l_0^{\text{akt}} \mathbf{N}^{\text{akt}} = \begin{bmatrix} 79{,}289 \\ 20{,}711 \\ -29{,}289 \end{bmatrix} \mathrm{kN} + \Delta l_0^{\text{akt}} \begin{bmatrix} -1{,}9252 \\ 1{,}9252 \\ -2{,}7226 \end{bmatrix} \cdot 10^4\,\mathrm{kN/m} \tag{2}$$

sind von einer unbekannten vorgegebenen Längenänderung im aktiven Element Δl_0^{akt} abhängig und in Abb. 2 (links oben) dargestellt. Die weiteren Schritte zur Charakterisierung des Optimierungsproblems in Kapitel 3 werden in Abb. 2 für dieses Minimalbeispiel veranschaulicht. Die aufgeführten Gleichungen sind jedoch allgemein gültig und auf eine beliebige Anzahl von Elementen und Aktoren übertragbar, solange die oben beschrieben Voraussetzungen erfüllt sind.

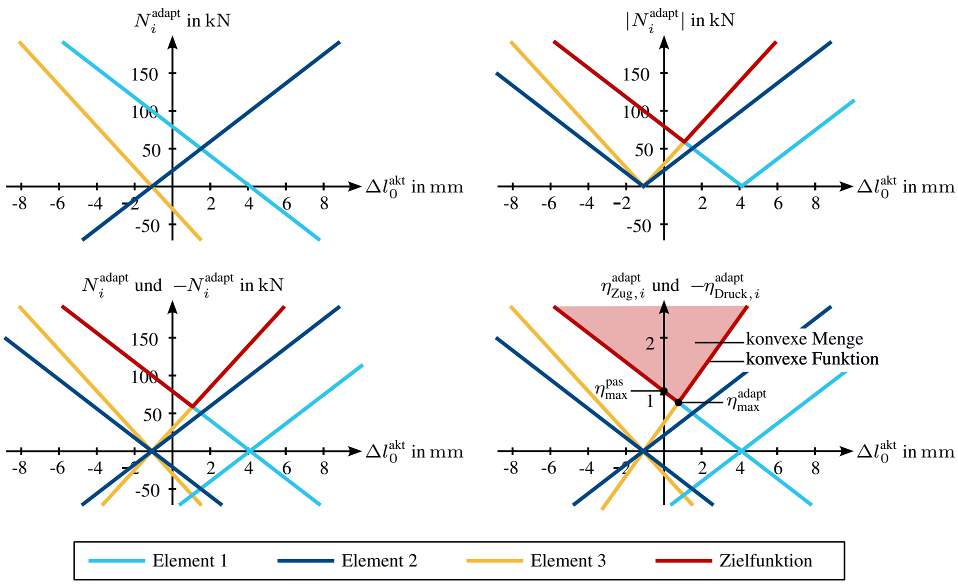

Abbildung 2: Schritte zur Reformulierung des Optimierungsproblems

3 Minimierung der maximalen Querschnittsausnutzung im Tragwerk

Um sich der Minimierung der maximalen Querschnittsausnutzung schrittweise zu nähern, soll zunächst der maximale Betrag der Normalkräfte im adaptiven Zustand N_i^{adapt} über allen n_{ele} Elemente minimiert werden:

$$\text{Minimiere} \quad f(\Delta l_0^{\text{akt},j}) = \max_{i=1..n_{\text{ele}}} \left(|N_i^{\text{adapt}}| \right). \tag{3}$$

Für das Minimalbeispiel aus Abb. 1 sind die Beträge der Normalkräfte sowie die Zielfunktion in Abb. 2 (rechts oben) visualisiert. Die Funktionen der Beträge der einzelnen Normalkräfte sind nur abschnittsweise linear und daher nicht auf dem gesamten Gebiet differenzierbar.

Durch eine Reformulierung der Funktionen können die Eigenschaften des Optimierungsproblems verbessert werden. Statt der Beträge der Normalkräfte können doppelt so viele lineare Funktionen zur Optimierung verwendet werden:

$$\text{Minimiere} \quad f\left(\Delta l_0^{\text{akt},j}\right) = \max_{i=1..n_{\text{ele}}} \left(|N_i^{\text{adapt}}| \right) = \max_{i=1..n_{\text{ele}}} \left(N_i^{\text{adapt}}, -N_i^{\text{adapt}} \right). \tag{4}$$

Da für die Zielfunktion das Maximum gebildet wird, verändert diese Reformulierung nicht die tatsächliche Zielfunktion, sondern führt lediglich zu einer einfacheren Auswertung, siehe Abb. 2 (links unten). Die einzelnen Funktionen, aus denen das Maximum gebildet wird, sind nun linear und folglich konvex. Nach [4] ist das Maximum aus konvexen Funktionen ebenfalls konvex, d. h. die Zielfunktion der betrachteten Optimierung ist eine konvexe Funktion.

Aufgrund der Konvexität ist jedes lokale Minimum ein globales Minimum. Da sie jedoch abschnittsweise linear ist, ist sie nicht im gesamten Gebiet differenzierbar.

Die Minimierung des maximalen Betrags der Normalkräfte ist nicht hinreichend, sobald unterschiedliche Querschnitte verwendet werden oder Stabilitätsversagen der Stäbe berücksichtigt werden soll. Deshalb werden die Überlegungen auf die Minimierung der maximalen Ausnutzung der Stäbe übertragen. Dabei wird von isotropem Materialverhalten ausgegangen. Die Ausnutzung η_i^{adapt} ist das Verhältnis zwischen einwirkende Normalkraft N_i^{adapt} und zulässiger Normalkraft N_i^{zul}

$$\eta_i^{\text{adapt}} = \frac{N_i^{\text{adapt}}}{N_i^{\text{zul}}}. \tag{5}$$

Für Zugkräfte wird die zulässige Normalkraft $N_{\text{Zug},i}^{\text{zul}}$ aus dem Produkt der Fließgrenze f_y und der Querschnittsfläche A_i bestimmt. Bei Druckkräften ist die zulässige Normalkraft das Minimum aus der zulässigen Normalkraft für Materialversagen und der zulässigen Knicklast für Eulerfall 2

$$N_{\text{Druck},i}^{\text{zul}} = \min\left(f_y A_i,\, \frac{\pi^2 E I_i}{L_i^2}\right) \tag{6}$$

und damit ggf. nicht nur von Querschnitts- und Materialeigenschaften, sondern auch von den Längen L_i der Stäbe abhängig. Die Minimierung der maximalen Ausnutzung der Stäbe kann mit Gl. (4)–(6) als

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad f(\Delta l_0^{\text{akt},j}) &= \max_{i=1..n_{\text{ele}}} \left(\frac{N_i{}^{\text{adapt}}}{N_{\text{Zug},i}^{\text{zul}}}, - \frac{N_i{}^{\text{adapt}}}{N_{\text{Druck},i}^{\text{zul}}} \right) \\ &= \max_{i=1..n_{\text{ele}}} \left(\eta_{\text{Zug},i}^{\text{adapt}}, - \eta_{\text{Druck},i}^{\text{adapt}} \right) \end{aligned} \tag{7}$$

definiert werden. Auch die Ausnutzungen der einzelnen Stäbe sind ausschließlich lineare Funktionen, da die Normalkräfte jeweils durch Konstanten geteilt werden. Die Eigenschaften der Zielfunktion ändern sich dadurch nicht und zur Lösung kann derselbe Algorithmus herangezogen werden.

Für das Minimalbeispiel sind die Funktionen der Ausnutzung in Abb. 2 (rechts unten) grafisch dargestellt. Die maximale Ausnutzung der Elemente kann durch die Optimierung von $\eta_{\max}^{\text{pas}} = 1{,}078$ auf $\eta_{\max}^{\text{adapt}} = 0{,}868$ reduziert werden. Aufgrund des knickgefährdeten Elements 3 unterscheidet sich das Optimum für die Minimierung der maximalen Ausnutzung von der Minimierung des maximalen Normalkraftbetrags.

Zur Lösung dieses Optimierungsproblems gibt es zwei unterschiedliche Strategien: Einerseits kann das Minimum durch eine Suche auf der konvexen, nicht-glatten Zielfunktion, z. B. mit dem Subgradientenverfahren, ermittelt werden. Andererseits kann das Problem erneut reformuliert werden und das Minimum anstatt auf der konvexen Funktion in der konvexen Menge, siehe Abb. 2 (rechts unten), gesucht werden. Die Lösung ist für beide Strategien dieselbe, da das Minimum auf dem Rand der konvexen Menge liegt.

Bei der zweiten Strategie wird eine fiktive Ausnutzung $\bar{\eta}$ als Hilfsvariable eingeführt und minimiert. In Nebenbedingungen wird festgelegt, dass diese fiktive Ausnutzung größer gleich den Querschnittsausnutzungen im adaptiven Zustand ist. Dadurch ist der Suchraum auf die konvexe Menge beschränkt. Die Minimierung der maximalen Ausnutzung kann somit als lineares Optimierungsproblem in Matrixschreibweise formuliert werden:

$$\text{Minimiere} \quad \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \quad \text{u. d. N.} \quad \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \tag{8}$$

mit

$$\mathbf{c}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \bar{\eta} \\ \mathbf{\Delta l}_0^{\mathrm{akt}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\mathbf{1} & \boldsymbol{\eta}_{\mathrm{Zug}}^{\mathrm{akt,1}} & \boldsymbol{\eta}_{\mathrm{Zug}}^{\mathrm{akt,2}} & \cdots \\ -\mathbf{1} & -\boldsymbol{\eta}_{\mathrm{Druck}}^{\mathrm{akt,1}} & -\boldsymbol{\eta}_{\mathrm{Druck}}^{\mathrm{akt,2}} & \cdots \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{\eta}_{\mathrm{Zug}}^{\mathrm{pas}} \\ \boldsymbol{\eta}_{\mathrm{Druck}}^{\mathrm{pas}} \end{bmatrix}. \tag{9}$$

Der Zielfunktionsvektor $\mathbf{c}^{\mathrm{T}}$ gibt an, dass nur die fiktive Ausnutzung $\bar{\eta}$ minimiert wird. Die Variablen sind im Vektor $\mathbf{x}$ definiert und setzen sich aus der fiktiven Ausnutzung $\bar{\eta}$ sowie dem Vektor der vorgegebenen Längenänderungen in den Aktorelementen $\mathbf{\Delta l}_0^{\mathrm{akt}}$ zusammen. Die Matrix $\mathbf{A}$ hat insgesamt $2n_{\mathrm{ele}}$ Zeilen, jeweils eine für die Ausnutzung infolge Zug und eine für die Ausnutzung infolge Druck jedes Elements. Die erste Spalte besteht aus lauter Einträge mit dem Wert -1. Auf den übrigen n_{akt} Spalten sind die Ausnutzungen infolge der einzelnen Aktuierungszustände abgebildet. Die passiven Ausnutzungen stehen im Vektor $\mathbf{b}$.

Das lineare Optimierungsproblem kann z. B. mit dem Simplex-Algorithmus, der 1947 erstmals von George Dantzig vorgestellt und seither weiterentwickelt wurde [1], effizient gelöst werden. Damit wird immer das Minimum der maximalen Ausnutzung erreicht. Über die Verteilung der übrigen Ausnutzungen im Tragwerk kann allerdings keine Aussage getroffen werden. Unter Umständen besteht das Minimum aus mehr als einem Punkt und eine Reduktion der nächstgrößten Ausnutzung ist durch eine Optimierung auf dem eingeschränkten Suchraum möglich. Dieses Vorgehen wird beim folgenden Beispiel verwendet.

4 Möglichkeiten und Einschränkungen der Kraftadaption

Als numerisches Beispiel soll das ebene Fachwerk in Abb. 3 mit vier gleichmäßig über das Tragwerk verteilten Aktoren dienen. Dabei sollen durch die Adaption die Belastungen unter den rot eingezeichneten, horizontalen Lasten reduziert werden. Die Material- und Querschnittswerte sind rechts in Abb. 3 gegeben. Der Aktuierungszustand $\mathbf{N}^{\mathrm{akt,1}}$ ist qualitativ in Abb. 3 (Mitte) visualisiert, wobei Druckkräfte rot und Zugkräfte blau eingezeichnet sind und die Breite der Linien dem Betrag der Normalkräfte entsprechen. Der Einfluss dieses Aktors nimmt über die Höhe stark ab.

In Abb. 4 (links) sind die Ergebnisse der Minimierung des maximalen Betrags der Normalkräfte dargestellt. Die maximale Beanspruchung im adaptiven Zustand kann gegenüber dem passiven Zustand nicht reduziert werden, weil die Normalkräfte in den beiden am stärksten belasteten Elementen 1 und 4 betragsmäßig gleich groß sind, aber ein unterschiedliches Vorzeichen haben. Durch den Aktor in Element 3 können die Normalkräfte in beiden Elementen jedoch nur mit gleichem Vorzeichen geändert werden. Der Betrag der maximalen Normalkraft wird durch eine Aktuierung des untersten Aktors folglich größer und nicht kleiner. Bei

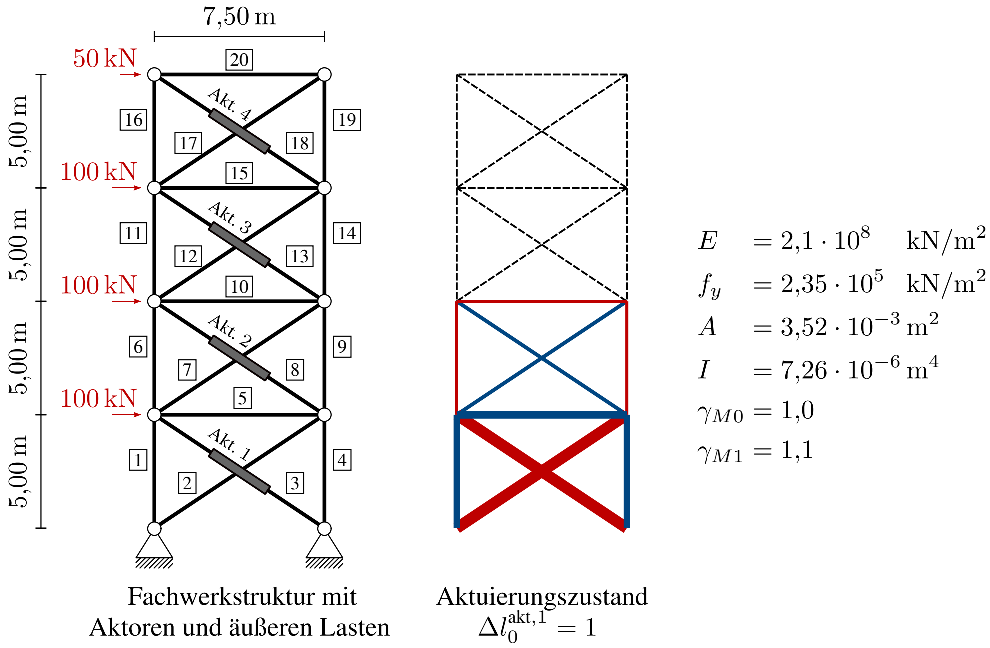

Abbildung 3: Adaptive Beispielstruktur mit $n_{\text{akt}} = n_{\text{S}} = 4$, Visualisierung eines Aktuierungszustandes sowie Material- und Querschnittsparamtern

der Minimierung der maximalen Ausnutzung hingegen ergibt sich ein signifikanter Unterschied zwischen dem passiven und adaptiven Zustand, siehe Abb. 4 (rechts). Hier sind in beiden Zuständen die knickgefährdeten Stäbe 3 und 8 am stärksten ausgenutzt. Die Aktuierung führt bei einer optimalen Einstellung der Aktoren zu einer Reduktion der maximalen Ausnutzung von $\eta_{\max}^{\text{pas}} = 1{,}301$ auf $\eta_{\max}^{\text{adapt}} = 0{,}833$.

5 Zusammenfassung

Für Fachwerkstrukturen stellen die Minimierung des maximalen Betrags der Normalkräfte oder die Minimierung der maximalen Ausnutzung unter Berücksichtigung von Stabilitätsversagen sinnvolle Optimierungsziele zur Kraftmanipulation dar. Durch die baustatische Betrachtung der Optimierungsaufgabe kann die mathematische Formulierung des Optimierungsproblems aufgestellt und vereinfacht werden sowie die Zielfunktion als konvexe Funktion identifiziert werden. Eine weitere Reformulierung ermöglicht die Suche in der konvexen Menge anstatt auf der konvexen, aber abschnittsweise linearen, ursprünglichen Zielfunktion und erlaubt damit die Anwendung des Simplex-Algorithmus zur Lösung des linearen Optimierungsproblems. Die Untersuchung an einer Beispielstruktur zeigt, dass das Potenzial zur Reduktion der maximalen Ausnutzung durch Kraftadaption davon abhängt, ob Kräfte von stark ausgenutzten Elementen in weniger ausgenutzte Tragwerksteile umgelagert werden können. Diese Möglichkeit ergibt sich wiederum aus einem Zusammenspiel zwischen dem passiven Normalkraftzustand und den Aktuierungszuständen.

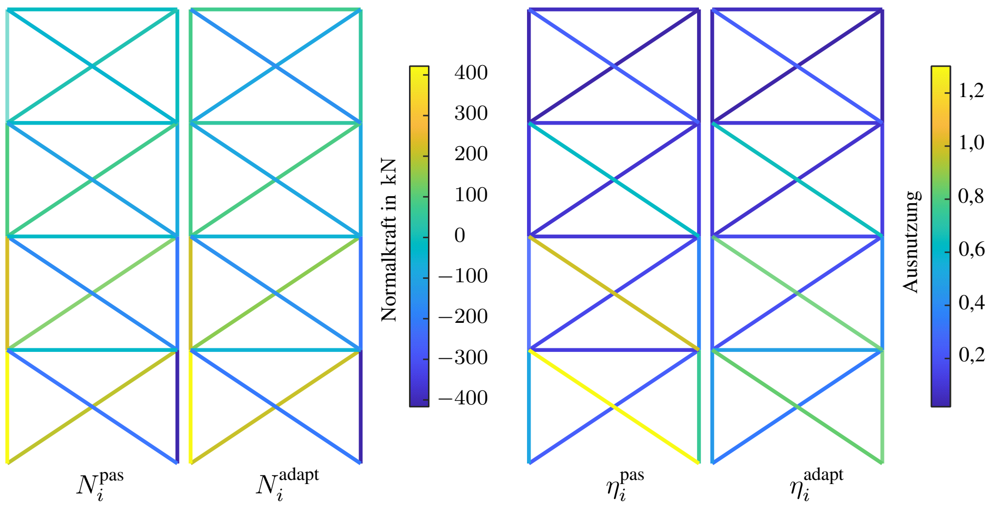

Abbildung 4: Ergebnisse der Optimierung: Minimierung des maximalen Betrags der Normalkräfte (links) und Minimierung der maximalen Ausnutzung (rechts)

Danksagung

Die präsentierten Forschungsergebnisse entstanden teilweise im Rahmen der Tätigkeiten in den Teilprojekten A02 – “Entwicklung integrativer Entwurfsverfahren und computerbasierter Entwurfswerkzeuge für adaptive Strukturen und deren Rekonfiguration” und B01 – “Charakterisierung, Modellierung und Reduktion” des Sonderforschungsbereichs 1244 “Adaptive Hüllen und Strukturen für die gebaute Umwelt von morgen”, gefördert von der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG) unter der Projektnummer 279064222. Die Autoren bedanken sich für die gewährte Unterstützung.

Literatur

[1] DANTZIG, G. B.: *Origins of the simplex method*. New York, NY, USA, Jun. 1990

[2] GEIGER, F. : *Strukturmechanische Charakterisierung von Stabtragwerken für den Entwurf adaptiver Tragwerke*, Bericht 74 / Institut für Baustatik und Baudynamik der Universität Stuttgart, Dissertation, 2022

[3] SCHEVEN, M. von ; RAMM, E. ; BISCHOFF, M. : Quantification of the redundancy distribution in truss and beam structures. In: *Int. J. Solids Struct.* 213 (2021), S. 41–49

[4] SHOR, N. Z.: *Minimization methods for non-differentiable functions*. Berlin, Germany : Springer, 1985 (Springer Series in Computational Mathematics)

[5] TRAUTWEIN, A. ; PROKOSCH, T. ; SENATORE, G. ; BLANDINI, L. ; BISCHOFF, M. : Analytical and numerical case studies on tailoring stiffness for the design of structures with displacement control. In: *Front. Built Environ.* 9 (2023)