

# Geometrische Optimierung von Gitterschalen

Eike Schling<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Institut für Entwerfen und Konstruieren, Leibniz Universität Hannover

**Zusammenfassung:** Die Baukomplexität von Gitterschalen hängt stark von der Geometrie der Knoten, Stäbe und Eindeckung ab. Durch das kontrollierte Entwerfen der Netzgeometrie, können die Anschlusswinkel, Krümmung und Form der Bauelemente rationalisiert oder sogar standardisiert werden. Gleiche, wiederverwendbare Elemente vereinfachen wiederum die Herstellung, Logistik und Montage, und ermöglichen zirkuläres Bauen. Diese Herangehensweise führt zu Wechselwirkungen zwischen Form und Struktur von Gitterschalen, und begründet eine eigene Ästhetik in der Baugleichheit der Elemente. Die enge Kooperation zwischen Architekten, Mathematikern und Bauingenieuren führt zu einer Symbiose von Form, Herstellung und Tragwerk, welche anhand von vier Forschungsprojekten dargestellt wird.

## 1 Einführung

Digitale Werkzeuge erweitern die architektonische Formensprache. Allzu oft führt dies zu einer Beliebigkeit der Entwurfsform. Doch alles ist baubar. Der digitale Planungsprozess ermöglicht die präzise Modellierung, dreidimensionale Fertigung, Logistik und Montage komplexe, individueller Bauteile. Es stellt sich die Frage: Warum ist überhaupt noch eine Rationalisierung der Form und Struktur nötig?

Ein klares Verständnis der geometrischen Komplexität zielt nicht nur auf die Vereinfachung der Konstruktion und die damit verbundene Kostenreduzierung. Architekten und Ingenieure gewinnen die Kontrolle über den Bauprozess zurück, indem sie sich über die Abhängigkeiten von Form, Segmentierung und Bauteilen bewusstwerden. So kann früh im Entwurfsprozess entschieden werden, welche Werkzeuge für die Fertigung eingesetzt werden sollen, welche Auswirkungen die Bauteile auf den Bauablauf haben und wie diese sich später wiederverwerten lassen. Auch das Tragverhalten wird durch die rationale Wahl der Geometrie beeinflusst, und ermöglicht eine homogene Ausnutzung gleicher Bauteile.

Die Kombination von geometrischem und mechanischem Fachwissen erschließt neue Konstruktionsweisen, und führt zu einer Symbiose von Form, Herstellung und Tragwerk.

Mit dieser Herangehensweise haben die Autoren in den vergangenen 5 Jahren einen Beitrag für den Entwurfsprozess von Gitterschalen geleistet. In den folgenden zwei Abschnitten stellen wir geometrische Methoden (2) für die Vereinfachung von Knoten, Stäben, Paneelen und Tragstruktur dar, und geben anschließend einen Ausblick (3) auf die Anwendung der Architekturgeometrie, mit dem Ziel nachhaltige Bauprozesse zu unterstützen.



**Abbildung 1:** Holzkuppel aus baugleichen Teilen. Die Gitterschale wurde aus gleichförmigen Eschenlatten, hexagonalen Knotenstäben und abwickelbaren Polycarbonatplatten konstruiert.

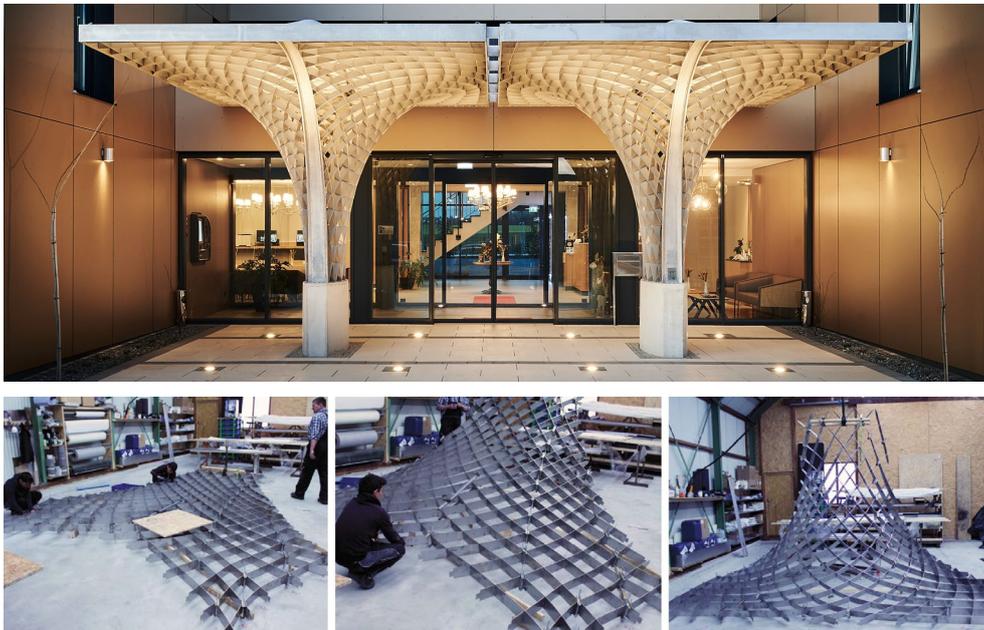
## 2 Geometrische Methoden

Die Komplexität von Knoten, Stäben und Paneelen einer Gitterschale, sind stark von der Ausformung des Gitters selbst abhängig. In einer diskreten Aufteilung sind die Stäbe grundsätzlich gerade. Dafür sammelt sich die Komplexität in den Knoten, in denen neben dem Kreuzungswinkel auch Torsionswinkel und seitliche (geodätische) und lotrechte (normale) Winkel berücksichtigt werden müssen. Sind die Stäbe kontinuierlich gekrümmt, so treffen sie sich eben im Knotenpunkt, in dem lediglich der Kreuzungswinkel abgebildet werden muss (Abb. 1). Die Komplexität verlagert sich in diesem Fall in die Stäbe, welche entweder elastisch gebogen oder dreidimensional hergestellt werden müssen, um die Verdrillung, sowie zweiachsige Krümmung abzubilden. Die Eindeckung folgt dann entlang der glatten Fläche, und kann zu abwickelbaren oder zylindrischen Paneelen vereinfacht werden.

Diese glatten und diskreten Formen werden in gängigen 3D Programmen als NURBS-Flächen (Non-Uniform Rational B-Spline Surface) oder Mesh modelliert. Die Differentialgeometrie ermöglicht es die Netze auf bestimmte Eigenschaften zu optimieren und so Bauteile zu rationalisieren. In der Geometrie kann dabei leicht zwischen diskreter und glatter Darstellung gewechselt werden, um bestimmte Regelmäßigkeiten einzuführen und auf den architektonischen Entwurf anzuwenden. Im Folgenden wird anhand vier Beispielen beschrieben, wie durch das Einprägen inhärenter geometrischer Eigenschaften eine Vereinfachung der Gesamtstruktur geschaffen, und eine Entwurfs-logik und Ästhetik erreicht wird.

## 2.1 Stäbe

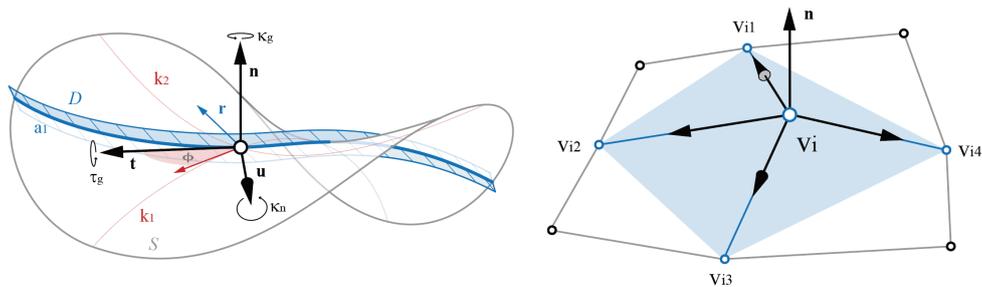
Durch das Biegen gerader Stäbe, lassen sich zweifach gekrümmte Gitterschalen einfach bauen. Diese Technik wurde bereits in den 70er Jahren von Frei Otto und seinem Team vorangetrieben [1]. Möchte man statt runden, oder doppelsymmetrischen Stäben, breite Holzlatten verwenden, so muss berücksichtigt werden, dass die Latten sich nicht, oder nur sehr wenig, um die starke Achse verbiegen lassen. In einem Forschungsprojekt an der Technischen Universität München, wurden spezielle „asymptotische“ Gitter entwickelt, deren Bauteile nur um eine Achse gebogen und tordiert werden [2]. Diese Gitterschalen lassen sich aus stehenden Profilen zusammenfügen und schaffen so lokal eine hohe Biegesteifigkeit, während sie global eine effiziente Schalentragswirkung ermöglichen. Es entstanden mehrere Bauten die, durch ihre schlanken Lamellenträger, eine ganz eigene Ästhetik, einer geschwungenen Wabenstruktur aufweisen. Die Lamellengitter lassen sich eben zu einem Gitterrost vorfertigen, und anschließend in eine negative gekrümmte Form biegen, ohne dass eine zusätzliche Schalung nötig ist (Abb. 2).



**Abbildung 2:** Asymptotisches Gitter des Hotel Intergroup in Ingolstadt. Die geraden Stahllamellen wurden eben ineinandergesteckt und anschließend in die räumliche Form gebogen [3].

Um eine solche Stabgeometrie zu finden, werden die drei Krümmungen entlang den theoretischen Kurven der Entwurfsfläche gemessen. Diese sind die Normalkrümmung, die geodätische Krümmung und die geodätische Torsion. Wenn die Normalkrümmung im ganzen Netz unveränderlich null bleibt, ist eine geraden Abwicklung der aufrechten Lamellen möglich (Abb. 3, links). Asymptotische Gitter lassen sich durch eine einfache Regel als diskrete Vierecksnetze generieren. Die vier Nachbarpunkte jedes Knotens müssen dafür in einer lokalen Ebene liegen (Abb. 3, rechts). Dies stellt sicher, dass die Flächenkurve sich lokal weder auf- noch abkrümmt. Durch diese diskrete Optimierung entstehen

sogenannte A-Netze, die später in glatte Kurven übersetzt werden können. Die Regel lässt sich auch verallgemeinern: Liegen die benachbarten Punkte jeweils auf einer Kugel dessen Radius vorgegeben ist, so lassen sich Gitter erzeugen, dessen Lamellen kreisförmig abwickelbar sind [4].

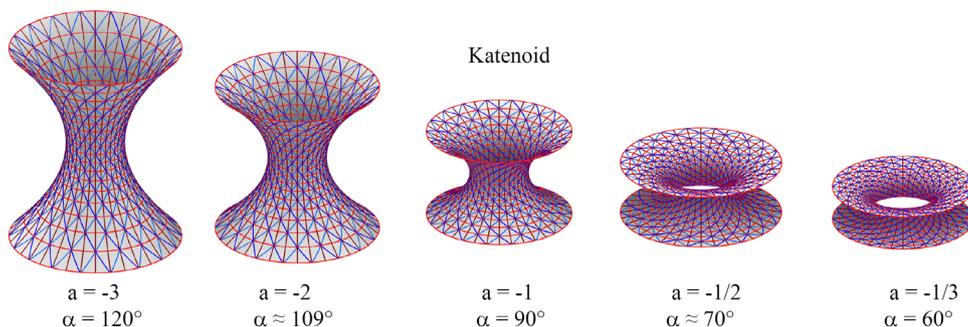


**Abbildung 3:** Links: Abwickelbarer Streifen entlang einer Kurve mit konstanter Normalkrümmung. Ist diese Null, so lassen sich Asymptotische Gitter aus geraden Lamellen entwerfen [4]. Rechts: die entsprechende diskrete Optimierung beruht auf der einfachen Regel, dass die vier benachbarten Punkte eines Knotens auf derselben Ebenen liegen [5].

## 2.2 Knoten

Die Knotenpunkte einer Gitterschale, übertragen die Kräfte und legen die Ausrichtung der angrenzenden Bauteile fest. Die Bautoleranzen sind hier üblicherweise gering, da eine kraftschlüssige Verbindung gewährleistet werden muss, die die Gesamtgeometrie festlegt, und an die weiteren Bauteile, wie Fassade oder Auflager, passgenau angeschlossen werden.

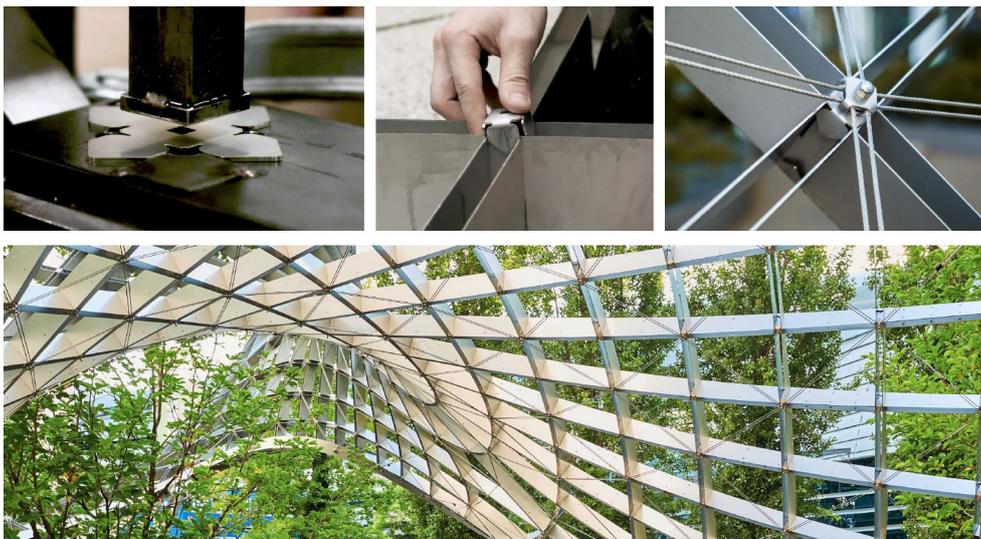
Für kontinuierlich gekrümmte Gitterstrukturen wird die Geometrie des Knotens maßgebend vom Kreuzungswinkel bestimmt. Es lassen sich gezielt glatte Netze entwerfen, die einen konstanten Kreuzungswinkel aufweisen. So bilden beispielsweise die Hauptkrümmungslinien einer Fläche - also die Kurven die stets der höchsten,  $k_1$ , bzw. niedrigsten,  $k_2$ , Normalkrümmung der Fläche folgen - ein orthogonales Netz. Die gleiche Eigenschaft haben die Spannungstrajektorien eines Schalentragerwerkes - also die Richtungen in der die Normalspannung maximal, oder minimal ist (siehe auch Abschnitt 2.4). Auch diese Vektoren stehen immer im 90-Grad-Winkel zueinander.



**Abbildung 4:** Asymptotisches Gitter des Hotel Intergroup in Ingolstadt. Die geraden Stahllamellen wurden eben ineinandergesteckt und anschließend in die räumliche Form gebogen.

Betrachten wir nun die Asymptoten-Bauweise aus Abschnitt 2.1: Um hier gleiche Winkel einzuführen, muss die Entwurfsfläche selbst eine Regelmäßige Krümmung aufweisen. Die beiden Hauptkrümmungen der Fläche müssen überall in einem konstanten Verhältnis,  $a = k_1/k_2$ , stehen [6]. Ist  $a = -1$ , so ergeben sich 90-Grad-Winkel der Asymptotischen Lamellenträger. Bei  $a = -1/3$ , sind die Kreuzungswinkel überall  $60^\circ$  (Abb. 1). Diese Formeigenschaft lässt sich anhand von Drehflächen gut veranschaulichen (Abb. 4), ist aber auf eine Vielfalt an Formen anwendbar. Flächen mit dem Krümmungsverhältnis  $a = -1$  heißen Minimalflächen und lassen sich in der Natur als Seifenhäute nachformen. Sie bilden zwischen einem vorgegebenen Rand immer die Form mit dem geringsten Flächeninhalt.

Digital kann diese Krümmungseigenschaft entweder mechanisch über das Spannungsverhältnis, oder geometrisch über die Krümmung modelliert werden. Manche Flächen, wie z.B. der Katenoid, lassen sich auch explizit mathematisch beschreiben. Im Falle der Gitterschale am Stammgelände der Technischen Universität München, wurde das mechanische Simulationstool, Kiwi3D [7], eingesetzt, um eine freie Minimalfläche zu entwerfen, die sich an der Bepflanzung des Innenhofes orientiert. Die gleichmäßige Krümmung vereinfacht nicht nur die Knoten. Sie wird als sehr ästhetisch wahrgenommen und schafft ein äußerst homogenes Gitter mit fast quadratischen Zellen (Abb. 5). Die rechtwinkligen Knoten wurden seriell gelasert und gestanzt, und fixieren das Gitter während dem Bauprozess in der räumlich gekrümmten Form [2].

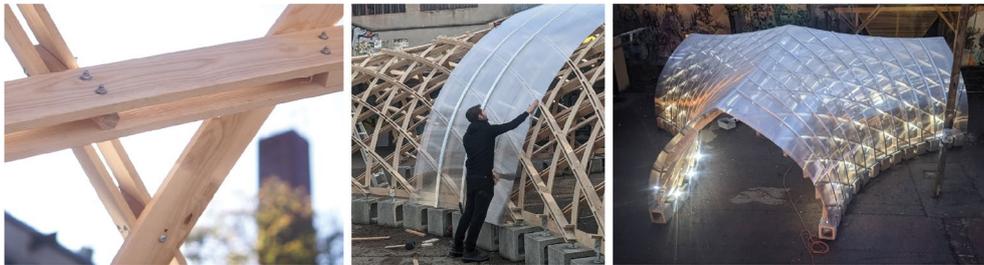


**Abbildung 5:** Alle Knoten der Stahlgitterschale an der Technischen Universität München sind rechtwinklig [4]. Der Entwurf folgt einer Minimalfläche mit dem Krümmungsverhältnis  $a = -1$ .

### 2.3 Paneele

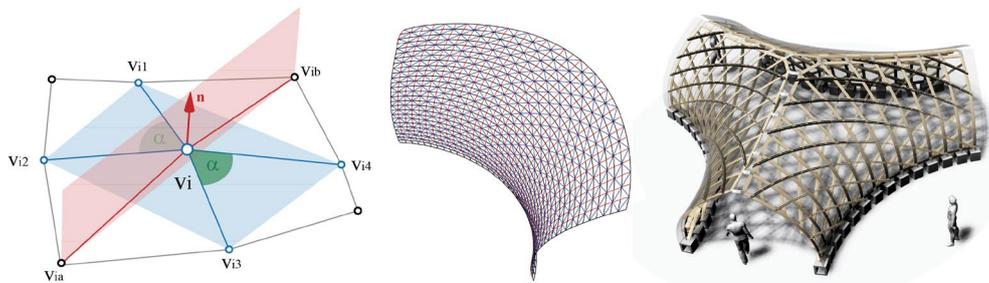
Das Fertigen gekrümmter Fassadenelemente ist oft mit hohen Kosten verbunden. Man unterscheidet zwischen einfacher und doppelter Krümmung. Einfache gekrümmte Paneele, wie z.B. Zylindern oder Kegeln lassen sich in die Ebene abwickeln, und entsprechend aus

Plattenmaterial zuschneiden und biegen. Um ein zweifach gekrümmtes Paneel herzustellen, muss das ebene Ausgangsmaterial entweder durch plastische Streckung und mithilfe von Schablonen in die gewünschte Form gezogen oder gegossen werden, oder aus einem größeren Block gefräst werden.



**Abbildung 6:** Gitterschale aus Eschenlatten. Die abwickelbaren Polycarbonat-paneele lassen sich mit geraden Pressleisten auf dem doppelt gekrümmten Gitter anbringen [5].

Allerdings lassen sich auch zweifach-gekrümmte Gitterschalen mit einfach-gekrümmten Paneelen eindecken, wenn man gewisse Knickwinkel zwischen angrenzenden Paneelen zulässt (Abb. 6). Diese „semi-diskrete“ Strategie wurde für die Holzgitterschale der University of Hong Kong angewendet [5]. Ziel war es, die ebenen Polycarbonat-platten nur geringfügig zuzuschneiden, und standardisierte Aluminiumpressleisten zu benutzen. Die Fassade muss dafür einer Geodäte folgen – also einem Pfad der nur geradeaus verläuft ohne sich nach links oder rechts zu krümmen. Die diskrete Optimierung für die Holzgitterschale beruht auf drei Knotenbedingungen (siehe Abb. 7, links): Dem ebenen Knotenstern aus Abschnitt 2.1 (blau, Asymptotische Lamellen), gleichwinkligen Kreuzungswinkel aus Abschnitt 2.2 (grün), und einer geodätischen Diagonale. Das bedeutet, dass die diagonalen Punkte jedes Knotens in derselben Ebene wie die Flächennormale liegen (rot) [8].



**Abbildung 7:** Digitale Methode *Links*: Es werden drei Bedingungen an jedem Knoten gestellt: Ebene (blau) und gleichwinklige (grün) Kreuzung der Hauptrichtungen, und eine Diagonale entlang der lotrechten Ebene (rot). *Mitte*: Diese diskrete Optimierung schafft ein gleichmäßiges Dreiecksnetz. *Rechts*: Durch Interpolation wird ein architektonisches Modell erzeugt [5].

So lassen sich drei Scharen gerader Lamellen in einem Netz gleichwinklig verweben – zwei stehend, und eine liegend. Diese liegende geodätische Lamelle trianguliert die Gitterschale und wird für die Eindeckung und Aussteifung genutzt. Alle Elemente sind ohne viel Verschnitt herzustellen und können nach dem Gebrauch wiederverwendet oder recycelt werden.

## 2.4 Tragwerk

Eine Standardisierung der Bauteile kann auch durch eine homogene Lastverteilung erreicht werden. In jedem Schalentragerwerk lassen sich, für einen bestimmten Lastfall, die Trajektorien der maximalen und minimalen Spannungspfade berechnen. Ist das Netz einer Gitterschale symmetrisch zu diesen Haupttrajektorien angeordnet, dann tragen benachbarte Stäbe die gleiche Druck-, oder Zugkraft ab. Das Prinzip lässt sich anschaulich auf Drehflächen anwenden [9]. Ein Vierecksnetz wird dabei so optimiert, dass unter Eigengewicht keine weitere Auskreuzung notwendig ist, da die diagonale Schrägstellung der Stäbe zu einem Gleichgewicht von Meridian- und Ringkräften führt (Abb. 8). Diese Principal-Symmetric Structures sind nur in Bereichen reiner Druck- oder Zugspannung möglich. Sobald Meridian- und Ringkräfte unterschiedliche Vorzeichen haben, ist das diagonale Gleichgewicht gestört, und Zug- bzw. Druckringe (grün) müssen eingeführt werden.

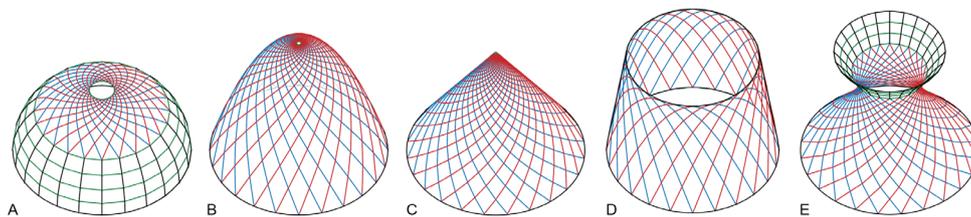


Abbildung 8: Drehflächen mit diagonalen Gleichgewichtsnetzen [9].

Das Prinzip wurde auf Freiformflächen angewandt (Abb. 9) [10, 11]. Durch eine Formfindung, Trajektorienberechnung und anschließende Netzoptimierung lassen sich vielfältige diagonale Druck- bzw. Zugsnetze entwerfen, die im Gleichgewicht stehen und eine homogene Kräfteverteilung aufweisen. Die Ergebnisse sollen im kommenden Jahr in einer großmaßstäblichen Konstruktion angewandt werden.

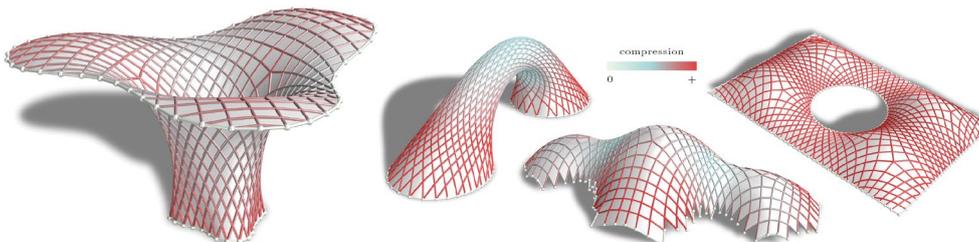


Abbildung 9: Principal Symmetric Structures weisen eine homogene Auslastung der Stäbe auf und benötigen unter Eigengewicht keine Auskreuzung [11].

## 3 Ausblick

Die Konstruktion von Gitterschalen kann, durch geometrische Optimierung stark vereinfacht werden. Dies kehrt den herkömmlichen Entwurfsprozesses um, da zuerst die Bauteileigenschaften festgelegt, und dann die Form entwickelt wird. Diese

Herangehensweise ist besonders im Anbetracht der aktuellen Diskussion des zirkulären Bauens von Bedeutung. Das Entwerfen mit recycelten Stoffen, oder standardisierten Bauteile, setzt voraus, dass die mechanischen und geometrischen Eigenschaften früh im Planungsprozess einbezogen werden. Neben den hier gezeigten Eschenlamellen, Stahlknoten, Aluminiumleisten und Polycarbonat-paneelen, lässt sich die Forschung auf jegliches seriell produzierte Produkt anwenden. Der Entwurf wird durch diese Bedingungen zwar eingeschränkt, weist aber dennoch eine große Formenvielfalt auf. Die Restriktion kann sogar zu einer eigenen Entwurfssprache und Ästhetik führen. Die dargestellten Entwurfsprojekte zeigen wie selbst komplexe Gitterschalen mit hoher Rationalisierung von Stäben, Knoten, Paneelen und Kraftfluss, gestaltet werden können. Es lassen sich neue Konstruktionsmethoden entwickeln, die mit einfachen Herstellungsmethoden, höchste anspruchsvolle und effiziente Tragwerke schaffen.

## Literatur

- [1] *Hennicke, J. (Hrsg.): IL10 Gitterschalen. Sonderforschungsbereich Weitgespannte Flächentragwerke, Mitteilungen des Instituts für Leichte Flächentragwerke (IL) Heft 10, Krämer, Stuttgart, 1974.*
- [2] *Schling, E.; Hitrec, D.; Barthel, R.: Designing Grid Structures using Asymptotic Curve Networks. In: Rycke, K. de; Gengnagel, C.; Baverel, O. et al. (Hrsg.): Design Modelling Symposium Paris 2017 – Humanizing Digital Reality. Springer, 2017, S. 125-140.*
- [3] *Schikore, J.; Schling, E.; Oberbichler, T. et al.: Kinetics and Design of Semi-Compliant Grid Mechanisms. In: Baverel, O.; Pottmann, H.; Mueller, C. et al. (Hrsg.): Advances in Architectural Geometry 2020, 2020, S. 108-129.*
- [4] *Schling, E.; Kilian, M.; Wang, H. et al.: Design and Construction of Curved Support Structures with Repetitive Parameters. In: Hesselgren, L.; Olsson, K.-G.; Kilian, A. et al. (Hrsg.): Advances in Architectural Geometry 2018. Klein Publishing, 2018, S. 140-165.*
- [5] *Schling, E.; Wan, Z.; Wang, H. et al.: Asymptotic Geodesic Hybrid Timber Gridshell. In: Dörfler, K.; Knippers, J.; Menges, A. et al. (Hrsg.): Advances in Architectural Geometry 2023. de Gruyter, 2023, S. 97-110.*
- [6] *Wang, H.; Pottmann, H.: Characteristic parameterizations of surfaces with a constant ratio of principal curvatures. In: Computer Aided Geometric Design 93 (2022), S. 102074. <https://doi.org/10.1016/j.cagd.2022.102074>.*
- [7] *Bauer, A.M.; Längst, P.: Kiwi3d! – Meshfree, Isogeometric FE Analysis integrated in CAD. Chair of Structural Analysis, TU Munich, 2019, <https://www.kiwi3d.com/> [Zugriff am: 27.05.2020].*
- [8] *Schling, E.; Wang, H.; Hoyer, S. et al.: Designing asymptotic geodesic hybrid gridshells. In: Computer-Aided Design 152 (2022), 0010-4485, S. 103378.*
- [9] *Schling, E.; Schikore, J.; Oberbichler Thomas: D-Nets – Equilibrium gridshells symmetric to the principal stress directions. In: : Inspiring the next generation. International Association for Shell and Spatial Structures, Surrey, 2021.*
- [10] *Pellis, D.; Pottmann, H.: Principal symmetric structures. In: Gabriele, S.; Bertetto, A.M.; Marmo, F. et al. (Hrsg.): Shell and Spatial Structures - Proceedings, S. 359-368.*
- [11] *Pellis, D.; Pottmann, H.: The Geometry of Principal Symmetric Structures – submitted, 2023.*